Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

3.1. Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

3.2. Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

3.3. Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1. Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. *On fera apparaître les calculs sur la copie.*

5.2. Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question **3.**

5.3. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

5.4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.

Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.

En déduire un équivalent de $1 - (1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A)\ \mathrm{e}^{b\ln(a)} \qquad (B)\ \mathrm{e}^{a\ln(b)} \qquad (C)\ \mathrm{e}^{\ln(a)\ln(b)}.$$

*****

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

3.2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Démontrer que $\forall\, k \geqslant 1$, $u_k > 0$.

4.2. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda\, u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

4.3. Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_n) = S_n$.

5. Pour tout t réel, on pose $f_0(t) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p$.

5.1. Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5.2. Calculer $I_{p+1} - I_p$ pour tout entier naturel p.

5.3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.

6. Un encadrement

6.1. Prouver que, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

6.2. En déduire que : $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall\, t \geqslant 0$, $g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right)^{n-1}$.

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

8. Soit β un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^{\beta} g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta \ln(2)} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u.$$

9. Démontrer que : $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.

10. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x \,|\, y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2\,\frac{< x \,|\, u >}{< u \,|\, u >}\, u - x.$$

1. Étude de l'application φ_u

1.1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

1.2. En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

1.3. Soit x appartenant à E, calculer $\langle\, \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(x) \,\rangle$.

1.4. En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \langle\, \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(y) \,\rangle = < x \,|\, y > .$$

1.5. On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u.
En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

2.3. Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.
Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall\, x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Delta^{\perp}, \quad \psi(x) = -x.$$

3.1. Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n .

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. Calcul de $I_n(0)$

5.1. Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

5.2. En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

Éléments de correction

EXERCICE 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \qquad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u admet $X^2 - 3X + 2$ pour polynôme annulateur. Il admet pour racines 1 et 2, il est scindé à racines simples, u est donc diagonalisable.
2. Si λ est une valeur propre de u alors, λ est racine de $X^2 - 3X + 2$. Les valeurs propres possibles de l'endomorphisme u sont $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
3. On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

3.1. On remarque que pour tout $x \in E$, $(v - w)(x) = x$, donc $v - w = \mathrm{id}_E$.
On veut montrer que $E \subset \mathrm{Im}(v)+ \mathrm{Im}(w)$. Soit donc $x \in E$, on a

$$x = \underbrace{v(x)}_{\in \mathrm{Im}(v)} + \underbrace{w(-x)}_{\in \mathrm{Im}(w)},$$

ce qui montre l'inclusion $E \subset \mathrm{Im}(v)+ \mathrm{Im}(w)$. On a donc bien l'égalité souhaitée étant donné que l'autre inclusion est toujours vraie.

3.2. On a :

$$v \circ w = (u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\mathrm{id}_E) = u^2 - 3u + 2\mathrm{id}_E = 0$$

et $w \circ v = v \circ w = 0$.

3.3. Soit $x \in \mathrm{Im}(w)$, il existe $a \in E$ tel que $x = w(a)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(v)$. On a

$$v(x) = v(w(a)) = v \circ w(a) = 0_E$$

d'après la question précédente. On a donc bien $x \in \mathrm{Ker}(v)$ d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
Soit maintenant $x \in \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = v(a)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(w)$.
On écrit, comme ci-dessus :

$$w(x) = w(v(a)) = w \circ v(a) = 0_E,$$

toujours d'après la question précédente. On a donc bien $x \in \mathrm{Ker}(w)$ d'où $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. D'après la question précédente, on a l'inclusion

$$\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(w) + \mathrm{Ker}(v).$$

Or, on a montré à la question **3.1.**, que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$, on a donc l'égalité :

$$E = \mathrm{Ker}(w) + \mathrm{Ker}(v).$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w)$. Alors

$$v(x) = 0_E = w(x)$$

donc $v(x) - w(x) = 0_E$. Or $v(x) - w(x) = x$, on a donc $x = 0_E$, ce qui montre que la somme est directe.

4. En choisissant une base de E adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{v}) \oplus \mathrm{Ker}(w)$, on aura une matrice diagonale car $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Ker}(w)$ sont des sous-espaces propres de u.

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1. On a

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } 3U - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On a donc $U^2 = 3U - 2I_3$ et u satisfait bien à la relation $(\star)$.

5.2. Par linéarité de la matrice associée à un endomorphisme, on sait que $V = U - I_3$ et $W = U - 2I_3$. On a donc

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

5.3. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} .$$

Une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ est donc $\mathcal{B}_1 = (e_1 + e_3)$

On a également :

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y.$$

Une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(w)$ est donc $\mathcal{B}_2 = (e_3, e_1 + e_2)$.

5.4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Par la formule du changement de base, $P^{-1}UP$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ c'est-à-dire la matrice diagonale D. On a donc bien $U = PDP^{-1}$.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul. On a $(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$. On en déduit que

$$1-(1-x)^\alpha \underset{0}{\sim} \alpha x$$

2. C'est la réponse (A) : $a^b = e^{b\ \ln(a)}$:

* * * * * *

Soit n un entier supérieur ou égal à 2

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. La série $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite $(a_k)_{k\in N}$ admet une limite finie car c'est une série télescopique. Or

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

donc la série est bien convergente et sa somme vaut $a_0 - \lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 1$.

3.2. D'après la question **1.**, on a $a_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n-1}{2^k}$.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général a_k est de même nature qu'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc convergente.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{1}{2^{k+1}} < \dfrac{1}{2^k} \leq 1$ puis $0 \leq 1 - \dfrac{1}{2^k} < 1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
On a donc $\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1} < \left(1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}\right)^{n-1}$ et enfin $1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}\right)^{n-1} < 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$.
La suite (a_k) est donc strictement décroissante, on a donc bien $\forall k \geq 1, u_k > 0$.

4.2. On a vu que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, u_k > 0$. Le réel λ doit être tel que la somme de la série de terme général λu_k soit égale à 1. On a vu à la question **3.1.** que la série $\sum u_k$ a pour somme 1. Il faut donc $\lambda = 1$.

4.3. On doit montrer que la série de terme général ku_k est convergente et déterminer sa somme. On fixe $N \geq 1$ et on écrit

$$\sum_{k=1}^{N} ku_k = \sum_{k=1}^{N}(ka_{k-1} - ka_k).$$

On veut faire apparaître une somme télescopique, on écrit donc

$$\sum_{k=1}^{N}(ka_{k-1} - ka_k) = \sum_{k=1}^{N}((k-1)a_{k-1} - ka_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{k-1}.$$

La première somme est télescopique et on fait un changement d'indice dans la seconde, on obtient

$$\sum_{k=1}^{N} ku_k = -Na_N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i.$$

On a $Na_N \sim \dfrac{(n-1)N}{2^N}$ d'après la question **1.**. On a donc $\lim\limits_{N\to+\infty} Na_N = 0$ et on a déja montré que la série $\sum a_i$ converge. Le membre de gauche admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ donc X_n admet une espérance. On la calcule en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k = S_n.$$

5. **5.1.** Pour $p = 0$, la convergence est immédiate. Prenons donc $p \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f_p est continue sur $\mathbb{R}^+$. En $+\infty$, on a $f_p(t) \sim pe^{-t}$ en utilisant l'équivalent de la question **1.**. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et positive, on en déduit que f_p est intégrable sur $[1, +\infty[$ est convergente. Ainsi, l'intégrale I_p est bien convergente.

5.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, les deux intégrales étant convergentes, on a

$$I_{p+1} - I_p = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^{p+1} - (1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - e^{-t})^p \, \mathrm{d}t$$

Une primitive de $t \mapsto e^{-t} (1 - e^{-t})^p$ est $t \mapsto \dfrac{1}{p+1} (1 - e^{-t})^{p+1}$. On a donc :

$$I_{p+1} - I_p = \frac{1}{p+1}.$$

5.3. On a montré à la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+1} - I_p = \dfrac{1}{p+1}$. On somme ces égalités pour p variant de 0 à $n-2$:

$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-2} \left(I_{p+1} - I_p\right).$$

La somme de droite est télescopique, on obtient donc :

$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = I_{n-1} - I_0.$$

On remarque que $I_0 = 0$ puisque l'on a posé $\forall t \in \mathbb{R}, f_0(t) = 0$. Par ailleurs, après changement d'indice, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. On a donc bien l'égalité souhaitée :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$$

6. Un encadrement

6.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

6.2. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

On somme ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient, en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

donc $[\ln(t)]_1^n \leq I_{n-1}$ puis

$$\ln(n) \leq I_{n-1}.$$

Montrons l'autre inégalité. On sait que pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. On somme ces inégalités pour k variant de 1 à $n-2$, on obtient, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n-1),$$

en calculant l'intégrale. Or, par changement d'indice dans la somme,

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} = I_{n-1} - 1.$$

On a donc $I_{n-1} - 1 \leq \ln(n-1)$ puis

$$I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1).$$

On a donc bien l'encadrement souhaité.

7. On commence par remarquer que la fonction g_n est décroissante. En effet, $t \mapsto 2^{-t}$ est décroissante donc $t \mapsto 1 - 2^{-t}$ est croissante.
La fonction $t \mapsto (1 - 2^{-t})^{n-1}$ est également croissante donc $t \mapsto -(1 - 2^{-t})^{n-1}$ est décroissante et enfin g_n est décroissante.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la fonction g_n, on a, pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$a_{k+1} \leq g_n(t) \leq a_k,$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\mathrm{d}t \leq a_k$$

On somme ces inégalités pour k variant de 0 à $m-1$, on obtient, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} \leq \int_0^m g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

On remarque que, par changement d'indice dans la première somme, on a

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

On a donc bien l'encadrement souhaité.

8. Soit β un réel strictement positif. On fait le changement de variable $u = \ln(2)v$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v$. On sait que v varie de 0 à β donc u varie de 0 à $\ln(2)\beta$. On a $\mathrm{d}u = \ln(2)\mathrm{d}v$ donc $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\ln(2)}$ et $u = \ln(2)v$ donc $e^u = 2^v$. On a donc

$$\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{\beta\ln(2)} \left(1-(1-e^{-u})^{n-1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{\beta\ln(2)} f_{n-1}(u)du.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

9. On sait que $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ d'après la question **4.3.**. On fait tendre m vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question **7.** :

$$-1 + \sum_{k=0}^{m} a_k \leq \int_0^m g_n(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k,$$

ce qui est possible car les séries convergent.
On obtient

$$\mathbb{E}(X_n) - 1 \leq \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \leq \mathbb{E}(X_n).$$

Or, en faisant tendre β vers $+\infty$ dans la question précédente, l'intégrale de f_n sur $[0,+\infty[$ étant convergente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}.$$

On a donc bien

$$\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$$

10. On a vu que

$$\ln(n) \leq I_{n-1} \leq \ln(n-1)+1,$$

donc

$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)},$$

et $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{\ln(n-1)}{\ln(n)} \to 1$. Par encadrement, on en déduit que $I_{n-1} \sim \ln(n)$.
En particulier. $I_n \to +\infty$.
On reprend maintenant l'encadrement trouvé à la question précédente, on le réécrit sous la forme

$$\frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} + 1.$$

On a donc $\mathbb{E}(X_n) \sim \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)}$ donc $\mathbb{E}(X_n) \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}$.
Enfin, comme $\mathbb{E}(X_n) = S_n$, on a trouvé un équivalent simple de S_n en $+\infty$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E sera noté $< x|y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E,\ \ \varphi_u(x) = 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x$$

1. Étude de l'application φ_u

1.1. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_u(\lambda x + y) &= 2\,\frac{< \lambda x + y\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - (\lambda x + y) \\
&= 2\,\frac{\lambda < x\,|\,u > + < y\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - \lambda x - y \\
&= 2\,\frac{\lambda < x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u + 2\,\frac{< y\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - \lambda x - y \\
&= \lambda\varphi_u(x) + \varphi_u(y).
\end{aligned}$$

Donc φ_u est bien un endomorphisme de E.

1.2. On remarque déjà que $\varphi_u(u) = u$. Puis, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\varphi_u \circ \varphi_u(x) &= \varphi_u\left(2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x\right) \\
&= 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\varphi_u(u) - \varphi_u(x) \\
&= 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}u - 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u + x \\
&= x
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$. Donc φ_u est un automorphisme de E et $\varphi_u^{-1} = \varphi_u$.

1.3.

$$\begin{aligned}
\langle\, \varphi_u(x)\,|\,\varphi_u(x)\,\rangle &= \left\langle 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x \,\middle|\, 2\,\frac{< x\,|\,u >}{< u\,|\,u >}\,u - x \right\rangle \\
&= 4\,\frac{< x\,|\,u >^2}{< u\,|\,u >^2} < u\,|\,u > -4\,\frac{< x\,|\,u >^2}{< u\,|\,u >} + < x\,|\,x > \\
&= < x\,|\,x >= \|x\|^2
\end{aligned}$$

1.4. D'après la question précédente, φ_u est une isométrie. Elle conserve donc le produit scalaire.

1.5. Comme $D_u = \mathrm{Vect}(u)$, on a $\varphi_u(D_u) = \mathrm{Vect}(\varphi_u(u)) = \mathrm{Vect}(u) = D_u$.
Comme D_u est stable par φ_u et que φ_u est une isométrie, $H_u = D_u^{\perp}$ est stable par φ_u.

1.6. Comme $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$ et φ_u est linéaire, φ_u est une symétrie. Comme c'est une isométrie, φ_u est une symétrie orthogonale. De plus, pour tout $x \in E$,

$$\varphi_u(x) = -x \iff < x\,|\,u >= 0$$

donc φ_u est la symétrie orthogonale par rapport à D_u.

2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$.

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

2.1. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $H = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid\, < X\,|\,u >= 0\right\} = D_u^{\perp}$. Autrement dit, $H^{\perp} = D_u$ est de dimension 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}u$ en est une base orthonormale.

2.2. Soit p' la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ et notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $p'(x) = \left\langle x \,\middle|\, \dfrac{u}{\sqrt{3}} \right\rangle \dfrac{u}{\sqrt{3}}$.

En particulier, $p'(e_1) = \dfrac{1}{3}u = p'(e_2) = p'(e_3)$. Ainsi, la matrice de p' dans la base canonique est :

$$M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, la matrice M de la projection orthogonale p sur H dans la base canonique est :

$$M = I_3 - M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3. Prenons $v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}u$. Comme φ_v est la symétrie orthogonale par rapport à $D_v = H^\perp$, on a $\varphi_v = \mathrm{id}_E - 2p$. La matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$-I_3 + 2M' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall\, x \in \Delta,\ \ \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Delta^\perp,\ \ \psi(x) = -x$$

3.1. Soit $x \in E$. Alors il existe $a \in \Delta$ et $b \in \Delta^\perp$ tels que $x = a+b$. Donc $\psi(x) = \psi(a)+\psi(b) = a-b$, puis, $\psi \circ \psi(x) = \psi(a-b) = a+b = x$. Donc $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$.
Puis, $< \psi(x)\,|\,\psi(x) >=< a-b\,|\,a-b >=< a\,|\,a > + < b\,|\,b >$ car a et b sont orthogonaux. De plus, $< x\,|\,x >=< a+b\,|\,a+b >=< a\,|\,a > + < b\,|\,b >=< \psi(x)\,|\,\psi(x) >$.
Ainsi, ψ est une isométrie, donc conserve le produit scalaire.

3.2. D'après la question précédente, ψ est la symétrie orthogonale par rapport à Δ. Prenons donc $u \in \Delta$ non nul, de sorte que $\Delta = D_u$. D'après la question **1.6.**, φ_u est la symétrie orthogonale par rapport à $D_u = \Delta$, donc $\varphi_u = \psi$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Comme le cosinus est pair,

$$I_n(-x) = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(-xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(xt)\,\mathrm{d}t = I_n(x)$$

Donc I_n est paire.

2. Soit $f : (x,t) \mapsto \left(1-t^2\right)^n \cos(tx)$:

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$;
- pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\left(1-t^2\right)^n \sin(xt)$ est continue sur $[0,1]$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$, et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction I_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $I_n'(x) = -\displaystyle\int_0^1 t\left(1-t^2\right)^n \sin(xt)\,\mathrm{d}t$. On effectue une intégration par parties en primitivant $t \mapsto -t\left(1-t^2\right)^n$ et en dérivant $t \mapsto \sin(xt)$:

$$\begin{aligned} I_n'(x) &= \left[\frac{1}{2(n+1)}\left(1-t^2\right)^{n+1}\sin(xt)\right]_0^1 - \frac{x}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

4. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$: on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à la question **2.**. Puis, soit $k \geq 1$ et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Prenons $n \in \mathbb{N}$. Alors I_{n+1} est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et d'après la question précédente, I_n' l'est aussi. Donc I_n est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.
On conclut alors par récurrence, et la fonction I_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Calcul de $I_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$

5.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties : on dérive $t \mapsto (1-t^2)^{p+1}$ et on primitive $t \mapsto 1$,

$$\begin{aligned} I_{p+1}(0) &= \left[t\left(1-t^2\right)^{p+1}\right]_0^1 + 2(p+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^p\,\mathrm{d}t \\ &= -2(p+1)I_{p+1}(0) + 2(p+1)I_p(0) \end{aligned}$$

Donc $I_{p+1}(0) = \dfrac{2p+2}{2p+3} I_p(0)$.

5.2. Par récurrence, on obtient $I_n(0) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k+1)} I_0(0)$. Or $I_0(0) = 1$, donc

$$I_n(0) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^n 2k}{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

6. En utilisant la formule du binôme, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_n(0) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{2k}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!}
\end{aligned}$$

Ainsi, la somme cherchée vaut : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!} = \frac{I_n(0)}{n!} = \frac{2^{2n}\,n\,!}{(2n+1)\,!}$.

7. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(1-t^2\right)^n (xt)^{2k}}{(2k)\,!}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k : t \mapsto (-1)^k \dfrac{\left(1-t^2\right)^n (xt)^{2k}}{(2k)\,!}$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|g_k(t)| \leq \dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!}$ qui est le terme général d'une série convergente vers $\mathrm{ch}(x)$.
Donc $\sum g_k$ converge normalement sur $[0,1]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k \left(1-t^2\right)^n (xt)^{2k}}{(2k)\,!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n t^{2k}\,\mathrm{d}t \right) \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)\,!}$$

Comme la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction I_n est développable en série entière sur tout $\mathbb{R}$.

9. Comme la fonction I_n est développable en série entière sur tout $\mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Malheureusement, il me faut reprendre presque intégralement les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées.
La rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur : des questions ne sont pas toujours traitées dans l'ordre au sein d'un même exercice, des candidats changent la numérotation des questions d'un exercice, des questions d'exercices différents traitées à la suite sans indication pour le correcteur...Cela ressemble à un mépris du correcteur difficilement acceptable.
les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.
Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.
- Une nouveauté : des erreurs similaires sur des copies qui se suivent...

Le sujet comportait quatre exercices indépendants. Le premier exercice d'algèbre linéaire proposait la diagonalisation explicite d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie avec une application en dimension 3.
Le deuxième de probabilité et d'analyse s'intéressait à une suite de variables aléatoires et la détermination d'un équivalent de leur espérance.
Dans le troisième exercice, d'algèbre bilinéaire, on proposait une étude de symétries orthogonales axiales.
Enfin, le quatrième exercice, d'analyse, portait sur quelques propriétés d'une intégrale à paramètres.
Ainsi, les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
Les questions détaillées devaient permettre à un étudiant bien préparé de montrer toutes ses compétences.
Le bilan est mitigé avec très peu de bonnes copies. Nombre de candidats se contentent d'affirmer des résultats sans les justifications ou les calculs indispensables.
On a trouvé un nombre non négligeable de copies très faibles où les questions sont ébauchées sans être traitées.
- Signalons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.

Il nous a semblé en effet que beaucoup de candidats lisent de plus en plus approximativement l'énoncé, ce qui induit nombre d'erreurs facilement évitables : « donner sans démonstration » donne lieu à une démonstration, « démontrer par récurrence » ne donne pas lieu à une récurrence, etc...

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
Il est parfois difficile de simplifier des expressions du type $a-(b-c)$!
Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
On trouve encore trop d'équivalents à 0...
Il manque souvent les restes des développements limités, restes que l'on découvre parfois dans les développements en série entière...
De plus, trop de candidats ne manipulent pas correctement les quantificateurs, les implications, les équivalences, ce qui entraîne de grosses difficultés dans les démonstrations, voire des contradictions.
- Dans le même type d'erreurs, on constate une grande confusion dans beaucoup de copies entre variable et paramètre : cela occasionne de grosses erreurs en particulier dans les intégrales à paramètre. Il est par ailleurs curieux de voir des candidats chercher un équivalent de la fonction à intégrer au voisinage de $+\infty$ alors que l'on intègre entre 0 et 1 !
Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $f(tx) \underset{0}{\sim}$ ne veut pas dire grand chose...
- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

<u>**Conclusion**</u> : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

• Exercice 1
- Question **1.** En général, la réponse est oui, mais avec des arguments parfois surprenant : puisque u possède un polynôme annulateur, il est diagonalisable, polynôme souvent qualifié de caractéristique .
- Question **2.** Les valeurs possibles des valeurs propres sont données sans trop de justifications.

- Question **3.** et **4.** Certains candidats ont du mal à justifier correctement les résultats. Sans compter les copies où tout est confondu : vecteurs, sous-espaces vectoriels et endomorphismes.
La notion de somme de sous-espace vectoriels est parfois confuse.
On a souvent vu :
• E = Im(v) +Im(w) $\Longrightarrow$ Im(v) = E - Im(w) !
• la somme des deux sous-espaces F et G est directe si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$...
L'utilisation de la distributivité de la composition par rapport à l'addition dans $\mathscr{L}(E)$ pose beaucoup de problème.
- La question **5.** est en général bien traitée. Les calculs étaient simples et la consigne de faire apparaître ces dits calculs n'est pas toujours respectée : on insiste de nouveau sur le fait que les candidats doivent lire attentivement l'énoncé. L'utilisation des endomorphismes v et w n'est pas toujours comprises, ce qui amène les candidats à effectuer la diagonalisation de la matrice U directement.

• **Exercice 2**
Le développement limité demandé à la question **1.** n'est pas toujours juste. On obtient souvent un équivalent comportant deux termes !
Globalement, dans tout l'exercice, le calcul algébrique pose encore beaucoup de problème à nombre de candidats : il est difficile d'obtenir que $1 - (1 - t) = t$ et non $-t$, ce qui fausse tous les calculs...
Même des questions faciles (questions de cours, **3.**, **6.2.** **6.1.** etc...) souffrent souvent d'imprécision et dénotent de beaucoup de confusion.
L'erreur classique u_n tend vers 0 et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge est malheureusement souvent rencontrée.
Dans la question **3.**, on constate une accumulation d'imprécisions, d'erreurs de calculs.
On manipule les sommes des séries sans se soucier de convergence...
La question **4.3.** (espérance de X_n) est rarement bien traitée.
Pour les convergences de séries et d'intégrales, les hypothèses de continuité et de positivité sont trop souvent oubliées alors qu'il s'agit d'hypothèses cruciales.
L'étude de la convergence de l'intégrale I_p est souvent remplacée par l'étude de la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$.
Le calcul correct de $I_{p+1} - I_p$ est assez rare, souvent remplacé par des calculs faux de primitives ou des manipulations d'intégrales divergentes.

• **Exercice 3**
D'une façon générale, cet exercice n'est pas réussi, beaucoup d'étudiants ne dépassant pas l'étude de la linéarité de φ. Il semble que les notations aient découragé nombre de candidats.
Les calculs sur le produit scalaire manquent souvent de simplicité et les étudiants ont souvent du mal à les mener jusqu'au bout.
Quelques erreurs fréquentes :
- le calcul de $\varphi_u \circ \varphi_u$ fait apparaître des produits ou des carrés de vecteurs,
- on rencontre des expressions de l'image de D_u faisant apparaître des produits du vecteur u par la droite D_u,
- la nature géométrique de φ_u est souvent donnée au hasard, sans aucune justification,
- la linéarité de φ_u est parfois établie et étudiant $\varphi_{\lambda u+v}$
- la conservation du produit scalaire (bien qu'elle soit explicitement écrite dans l'énoncé) se résuma souvent à $\varphi_u(< x|y >) =< x|y >$.

La question **2.** permettait de sécuriser les étudiants. Cependant, reconnaître pour H l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$ et en trouver un vecteur normal est souvent insurmontable.

• Exercice 4

- Question **1.** : Quelques rares candidats pensent que la fonction cos est impaire...

On constate une certaine confusion entre x et t dans l'intégrale.

- Question **2.** : Question bien traitée par ceux qui pensent à bien utiliser le Théorème de classe C^1 des intégrales à paramètres, ce qui n'est pas le cas de tous.
- Question **3.** : Question elle aussi souvent bien traitée.
- Question **4.** : On retrouve dans cette question toutes les difficultés de rédaction d'un raisonnement par récurrence.
- Question **5.** : Un calcul que l'on pouvait penser courant mais qui n'est pas toujours réussi avec beaucoup d'erreurs sur les dérivées ou les primitives à utiliser.

Souvent, l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales !

L'expression finale avec des factorielles est rarissime.

- Question **6.** : Question rarement réussie.
- Question **7.** : Une bonne partie des étudiants ne connaît ni le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \cos(u)$, ni son domaine de validité.
- Les questions **8.** et **9.** sont rarement abordées.

Luc VALETTE

FIN