Centrale-Math2-2023 - Proposition de corrigé

14 septembre 2023

I Utilisation de séries entières

I.A- Une première formule

Q 1. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Notons f sa somme. $\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ f(x) = \dfrac{1}{1-x}.}$

Q 2. Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

$\boxed{\text{Donc la série entière } \sum_{n\geqslant 0} n x^n \text{ a également pour rayon de convergence 1.}}$

De plus par propriété de dérivation des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\text{d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Q 3. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \geqslant k$ on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ et donc $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

Donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\dfrac{1}{k!}\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n$, qui vaut 1 par k applications successives de la propriété rappelée ci-dessus.

La dérivée k-ième de f est donnée pour $x \in]-1,1[$ par $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ (justification par récurrence sur k) et par ailleurs en dérivant k fois la série entière on obtient pour $x \in]-1,1[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n \\ &= x^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi le rayon de convergence de } \sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n \text{ vaut 1 et } \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.}$$

I.B- Utilisation d'une famille de polynômes

Q 4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme précisé à la question précédente, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n$ est égal à 1, et de plus la série est grossièrement divergente lorsque $x = 1$ et $x = -1$.

Donc la fonction f_k est donc définie sur $]-1,1[$.

Q 5. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, le polynôme H_j est de degré j. On en déduit que la famille $(H_0,\dots,H_k)$ est une famille échelonnée en degrés, donc libre, de $k+1$ polynômes appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ qui est de dimension $k+1$. Cette famille constitue donc une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Le polynôme $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$ s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille,

il existe donc une unique famille $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j \quad (*)$.

Q 6. Pour $k = 0$, on a directement $\alpha_{0,0} = 1$.
Soit $k \geqslant 1$, alors en évaluant la relation $(*)$ en 0 on obtient, compte tenu de $H_k(0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$, que $\alpha_{k,0} = 0$.
En identifiant les coefficients des termes de degré k dans $(*)$, absents dans H_j si $j < k$, on obtient

$\frac{\alpha_{k,k}}{k!} = 1$ et donc $\alpha_{k,k} = k!$.

Q 7. Soient deux entiers j et k tels que $1 \leqslant j \leqslant k$.

En évaluant la relation $(*)$ en j, on obtient $j^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j)$. Si $j < i$ alors $X - j$ est un facteur de H_i et donc $H_i(j) = 0$. En revanche si $j \geqslant i$ on obtient

$$H_i(j) = \frac{1}{i!}\prod_{\ell=0}^{i-1}(j-\ell) = \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{i!} = \binom{j}{i}$$

On obtient finalement $j^k = \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i}\binom{j}{i}$ et en isolant le terme $i = j$, $\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1}\alpha_{k,i}\binom{j}{i}$.

Q 8.

```python
def binome(n,k):
    b=1
    for i in range(k):
       b=b*(n-i)/(i+1)
    return b

def alpha(k,j):
   if k==0:
     return 1
   else:
     A=[0]
     for l in range(j):
        A.append((l+1)**k-sum([binome(l+1,i)*A[i] for i in range(l+1)]))
     return A[j]
```

Q 9. Soit k un entier naturel. Soit x un réel de $]-1,1[$.

- Par définition, $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

  Or d'après la question 5, $n^k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j(n)$. Donc $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j(n)x^n$.

  Par linéarité de la somme de séries convergentes, $f_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\sum_{n=0}^{+\infty}H_j(n)x^n$.

  Or par définition $H_j(n) = \begin{cases}\binom{n}{j} & \text{si } n \geqslant j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Mais par convention $\binom{n}{j} = 0$ si $j < n$. Donc $H_j(n) = \binom{n}{j}$.

  Ainsi $f_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{j}x^n$.

D'après la question 3, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{j}x^n = \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}$. Ainsi $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \frac{\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}x^j(1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}}$.

◇ Soit P_k et Q_k deux polynômes tel que pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et $f(x) = \dfrac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$.

Alors pour tout $x\in]-1,1[$, $P_k(x) = Q_k(x)$.

Finalement pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que,
pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et $P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$.

Q 10. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
P_k(X) &= \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j\sum_{\ell=0}^{k-j}\binom{k-j}{\ell}(-1)^\ell X^\ell\\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{k-j}\alpha_{k,j}\binom{k-j}{\ell}(-1)^\ell X^{j+\ell}\\
&= \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{s}\alpha_{k,j}\binom{k-j}{s-j}(-1)^{s-j}X^s
\end{aligned}$$

```
def P(k):
   C=[]
   for s in range(k+1):
     C.append(sum([alpha(k,j)*binome(k-j,s-j)*(-1)**(s-j) for j in range(s+1)]))
   return C
```

Q 11. Soit k un entier naturel.

Par définition, $\forall x\in]-1,1[$, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^kx^n$.

En tant que série entière, f_k est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x\in]-1,1[$, $f_k'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^{k+1}x^{n-1}$.

Donc $\forall x\in]-1,1[$, $f_{k+1}(x) = xf_k'(x)$.

Or $\forall x\in]-1,1[, f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$. Donc $\forall x\in]-1,1[, f_k'(x) = \dfrac{(1-x)P_k'(x)+(k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$.

Alors $\forall x\in]-1,1[, f_{k+1}(x) = \dfrac{x(1-x)P_k'(x)+(k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$.

Par unicité du polynôme P_{k+1}, $P_{k+1}(x) = x(1-x)P_k'(x)+(k+1)xP_k(x)$.

Q 12. $P_0 = 1$, $P_1 = X$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P_2(X) &= X(1-X)+2X^2\\
&= X^2+X\\
P_3(X) &= X(1-X)(2X+1)+3X(X^2+X)\\
&= 2X^2+X-2X^3-X^2+3X^3+3X^2\\
&= X^3+4X^2+X
\end{aligned}$$

Q 13. Montrons par récurrence sur k que P_k est un polynôme de degré k et que son coefficient dominant noté c_k vaut 1.

(I) P_0, P_1, P_2 et P_3 sont des polynôme de degré respectifs 0, 1, 2 et 3 et leur coefficient dominant vaut 1.

(H) Soit k un entier naturel. Supposons que P_k est un polynôme de degré k et que son coefficient dominant vaut 1.
D'après la question 11 $P_{k+1} = X(1-X)P_k'+(k+1)XP_k$.
Donc P_{k+1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+1$. Et $c_{k+1} = -kc_k+(k+1)c_k = c_k = 1$.
Donc P_{k+1} est un polynôme de degré $k+1$ et de coefficient dominant à 1.

Ainsi P_k est un polynôme de degré k et que son coefficient dominant vaut 1.

Q 14. Procédons à nouveau par récurrence sur k.

(I) $x^2P_1\left(\frac{1}{x}\right) = x = P_1(x)$ et $x^3P_2\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right) = x+x^2 = P_2(x)$.

(H) Soit k un entier naturel non nul. Supposons que pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

D'après la question 11 $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

Donc $\forall x \in]0,1[$, $x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) = x^{k+2}\left(\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^k\left((x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right)+(k+1)xP_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Par hypothèse de récurrence, $\forall x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Donc en dérivant, $\forall x \in]0,1[$, $(k+1)x^kP_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right) = P_k'(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } P_{k+1}(x) &= x(1-x)P_k'(x)+(k+1)xP_k(x)\\
&= x(1-x)\left((k+1)x^kP_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right)+(k+1)xP_k(x)\\
&= (k+1)x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^k(1-x)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) - (k+1)x^{k+2}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+(k+1)xP_k(x)\\
&= x^k\left((x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right)+(k+1)xP_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)+(k+1)x\left(-x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+(k+1)P_k(x)\right)\\
&= x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi par le principe de récurrence, $\forall x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Q 15. Soit k un entier naturel non nul.

Il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_k$ tel que $P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i$.

D'après la question 13, $c_k = 1$ et de même par récurrence, on montrerait que $c_0 = 0$. Donc $c_0 = c_{k+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } x^{k+1}P\left(\frac{1}{x}\right) &= x^{k+1}\sum_{i=1}^{k} c_i\frac{1}{x^i}\\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i x^{k+1-i}\\
&= \sum_{i=1}^{k} c_{k+1-i}x^i
\end{aligned}$$

Donc par unicité des coefficients $\forall i \in [\![0,k+1]\!]$, $c_i = c_{k+1-i}$.

I.C- Une dernière formule

Q 16. Pour $x \neq 0$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \binom{2n}{n}|x^n| > 0$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!}|x| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|x|$$

On déduit alors du critère de d'Alembert que si $|x| < \frac{1}{4}$ alors la série de terme général u_n converge, et que si $|x| > \frac{1}{4}$ alors cette même série diverge. On en déduit que $R = \frac{1}{4}$.

Par développement en série entière de référence on a, pour tout x tel que $|4x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(-4x)^n$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$

et ainsi, pour tout $x \in I = \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-4x)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$.

Q 17. La fonction $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x}}$.

On en déduit qu'une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{1-4x}}{2}$, et que la primitive qui s'annule en 0 est $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. Par primitivation d'une série entière, on en déduit que, pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ et après division par x, $\boxed{\text{pour tout } x \in I \setminus \{0\},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad (I.1).}$

Q 18. Les séries des deux questions précédentes ayant pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$, la série entière obtenue par produit de Cauchy a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{4}$ et, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\right)\\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\,\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi pour tout } x \in I \setminus \{0\},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).}$

Q 19. Or, toujours d'après le développement en série entière de la question **Q16**, pour $x \in I \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}x^n$$

Par unicité du développement en série entière, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} \quad (I.2).}$

II Etude de sommes doubles

II.A- Application

II.A.1) Une première application

Soit $x \in \,]-1,1[$.

Q 20. Puisque $|x| < 1$, on a $\dfrac{nx^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} nx^n$. Or $\sum nx^n$ converge (**Q1**).

Donc d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$ converge.

Posons, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $a_{n,k} = nx^{n(1+k)} = nx^n(x^n)^k$. Pour tout n fixé, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_{n,k}$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{nx^n}{1-x^n}$.

$\boxed{\text{Donc } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}.}$

Q 21. Le calcul précédent réalisé avec $|a_{n,k}| = n|x|^{n(1+k)}$ montre que la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}|$ est finie, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k}$ existe et est égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$.

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{1+k})^n = \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}$ d'après **Q2** appliquée avec $x^{1+k} \in \,]-1,1[$.

Après réindexation on obtient que $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}$.

$\boxed{\text{Donc la série } \displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2} \text{ converge et que sa somme est égale à celle de la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}.}$

II.A.2)- Une deuxième application

Q 22. On a $\dfrac{1}{k^3(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^4}$ donc par équivalence, la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^3(k+1)}$ converge et donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3(k+1)}$ est bien défini, $\boxed{\text{Donc } u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3(k+1)} \text{ existe bien.}}$

Q 23. Posons, pour $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \dfrac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k \geqslant n \end{cases}$ qui est une famille de nombres positifs ou nuls.

On remarque que pour tout n fixé, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = u_n$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in [0,+\infty]$.

D'autre part pour k fixé on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{k} \dfrac{n}{k^3(k+1)} = \dfrac{1}{k^3(k+1)} \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{1}{2k^2}$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k}$ est finie et vaut $\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k}$ est également finie de même somme, autrement dit $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{12}.}$

II.B- Contre-exemples

II.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Q 24. Soit $i \in \mathbb{N}$ fixé, alors la série $\sum_{j\geqslant 0} b_{i,j}$ est convergente car $(b_{i,j})_{j\geqslant i+1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = -1 + 1 = 0.$$

En conséquence la série de terme général $\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ est convergente car c'est la série nulle,

et $\boxed{\text{donc le nombre } \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} \text{ existe et est nul.}}$

Q 25. Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé, alors la série $\sum_{i\geqslant 0} b_{i,j}$ est convergente car $(b_{i,j})_{i\geqslant 0}$ est nulle à partir d'un certain rang, et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} - 1 = \frac{1}{2^j}\frac{1-2^j}{1-2} - 1 = -\frac{1}{2^j}$$

Donc la série de terme général $\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, et

$\boxed{\text{donc le nombre } \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} \text{ existe et vaut } \sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{-1}{2^j} = -2.}$

Q 26. Ainsi les nombres $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existent mais ne sont pas égaux.

Ceci ne contredit pas le résultat rappelé puisque l'on a ici $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |b_{i,j}| = +\infty$.

II.B.2)- Un deuxième contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i\,3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Q 27. Comme dans le paragraphe précédent, pour $i \in \mathbb{N}$ fixé la série $\sum_{j\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente car géométrique de raison $\frac{1}{3}$ à partir d'un certain rang, et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} = i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} 3^{i-j} = i - 2i \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = i - 2i \frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}\right)} = i - 2i\frac{1}{2} = 0$$

et ainsi le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ existe et est égal à 0.

Q 28. Soit $j \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente car nulle à partir d'un certain rang, et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1}(-2i3^{i-j}) + j = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i$$

Supposons $j \geqslant 1$, pour tout $x > 1$ on a $\sum_{i=0}^{j-1} x^i = \frac{x^j - 1}{x-1}$, ce qui définit une fonction f dérivable sur $]1, +\infty[$ telle que

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{j-1} ix^{i-1} = \frac{jx^{j-1}(x-1) - (x^j - 1)}{(x-1)^2}$$

En particulier $\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = 3f'(3) = 3\frac{2j\,3^{j-1} - (3^j - 1)}{4}$ et ainsi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j}\,\frac{2j\,3^j - 3(3^j-1)}{4} = j - j + \frac{3(3^j-1)}{2\times 3^j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}},$$

ce résultat étant également valable pour $j = 0$ car dans ce cas $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = 0$.

Ainsi la série $\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ est convergente et $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

Q 29. On remarque que $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$, la série $\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$ est donc grossièrement divergente.

On est à nouveau dans un cas où la famille n'est pas sommable, ce qui explique que les deux sommes doubles puissent avoir un comportement différent.

III Probabilités

III.A- Un conditionnement

Q 30. Soit k un entier naturel et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n, Y = k) &= \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{X=n}(Y = k) \\ &= p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!} \end{aligned}$$

Q 31. ⋄ D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}e^{-n} \\ &= \frac{pe^{-1}}{1-(1-p)e^{-1}} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{p}{e - 1 + p}$.

◇ Soit k un entier non nul.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=k).$$

$$\begin{aligned}\text{Alors } \mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}\\ &= \frac{p}{(1-p)k!}f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{p}{(1-p)k!}f_k\left(\dfrac{1-p}{e}\right)$.

Q 32.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k) &= \frac{p}{e-1+p}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^k\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^k\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \quad \text{car ces sommes sont à termes positifs}\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n(e^n-1)\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\right)\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\left(\frac{1}{1-(1-p)}-\frac{1}{1-\frac{1-p}{e}}\right)\\ &= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\cdot\frac{e-1+p-ep}{p(e-1+p)}\\ &= 1\end{aligned}$$

Q 33. Comme Y prend des valeurs positives, déterminons $\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(Y=k)$. Si la valeur de cette somme est finie alors Y admet une espérance.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)(k-1)!}f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^{k+1}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^{k+1}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \quad \text{car ces sommes sont à termes positifs}\\ &= \frac{p}{(1-p)}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}\\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1-p}{e}\right)^n e^n\\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(1-p)^n\\ &= \frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{(1-(1-p))^2}\\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{1}{p}$.

Q 34. Comme $Y(Y-1)$ prend des valeurs positives, déterminons $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(Y=k)$.

Si la valeur de cette somme est finie alors $Y(Y-1)$ admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)(k-2)!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^{k+2}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^{k+2}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \qquad \text{car ces sommes sont à termes positifs} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1-p}{e}\right)^n e^n \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2(1-p)^n \\
&= \frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)(1+(1-p))}{(1-(1-p))^3} \\
&= \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Donc $Y(Y-1)$ admet une espérance et $E(Y(Y-1)) = \dfrac{2-p}{p^2}$.

Alors Y admet un moment d'ordre 2 et $V(Y) = E(Y(Y-1) + E(Y) - E(Y)^2 = \dfrac{2-p}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}$.

Ainsi Y admet une variance et $E(Y) = \dfrac{1}{p^2}$.

III.B- Pile ou face infini

Q 35. $A_n = (X_1 + \ldots + X_{2n} = n)$.

Or $X_1 + \ldots + X_{2n}$ suit une loi binomiale de paramètre $(2n, p)$. Donc $\mathbb{P}(A_n) = \dbinom{2n}{n} p^n(1-p)^n$.

Q 36. Soit n et k deux entiers distincts.
$B_n \cap B_k$ est l'événement «pour la première fois, il y a autant de piles que deux faces à l'issue des $2n$ et $2k$ lancers». Il faudrait se décider au rang $2n$ ou $2k$, les deux en même temps n'est pas possible «pour la première fois».

Ainsi $B_n \cap B_k = \varnothing$ ou encore B_n et B_k sont incompatibles.

Q 37. Pour qu'il y ait exactement autant de piles que de faces, il faut un nombre pair de lancers.

Donc $C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

Alors par incompatibilités des événements, $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Q 38. Remarquons que $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$.

Or les événements $(B_1, \cdots, B_n)$ sont deux à deux incompatibles.

Donc $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_n)$.

Or $\forall k \in [\![1,k]\!]$, $\mathbb{P}_{B_k}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$ car sachant la première fois qu'il y a autant de piles que de faces est au $2k^{\text{ème}}$ lancer, pour qu'il y ait autant de piles que de faces est au $2n^{\text{ème}}$ lancer, il faut que les $2(n-k)$ lancers entre le $(2k+1)^{\text{ème}}$ lancer et le $2n^{\text{ème}}$ comporte autant de piles que de faces.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

Q 39. Procédons par récurrence forte sur n.

(I) $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) = 2pq = \dfrac{2}{1}\dbinom{1-1}{2-2}(p(1-p)^1$

(H) Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(B_k) = \dfrac{2}{k}\dbinom{2k-2}{k-1}\big(p(1-p)\big)^k$.

Alors d'après la question précédente, $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n+1-k})$.

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{\mathbb{P}(A_0)}\left(\mathbb{P}(A_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n+1-k})\right)$.

D'après la question 35, $\mathbb{P}(A_n) = \dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n$.

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dbinom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\dbinom{2(n+1-k)}{n+1-k}(p(1-p))^{n+1-k}$.

Et par hypothèse de récurrence,

$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dbinom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k}\dbinom{2k-2}{k-1}\big(p(1-p)\big)^k\dbinom{2(n+1-k)}{n+1-k}(p(1-p))^{n+1-k}$.

Ainsi $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dbinom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2}{k+1}\dbinom{2k}{k}\dbinom{2(n-k)}{n-k}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

D'après l'égalité (I.3),

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \left(\binom{2n+2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n-2n}{n-n}\right)\big(p(1-p)\big)^{n+1}$$

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2(n+1)-2}{n+1-1}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{2}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n$.

Q 40. D'après la question 37, $\mathbb{P}(C) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

D'après la question précédente, $\mathbb{P}(C) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n$.

Et par changement d'indice, $\mathbb{P}(C) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

Or $p \neq \dfrac{1}{2}$. Donc $p(1-p) \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right[$.

Alors d'après la formule (I.2), $\mathbb{P}(C) = 2p(1-p)\dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p(1-p)}$.

Ainsi $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.

Q 41. Remarquons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n}\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1}$ converge.

En effet d'après la formule de Stirling, $\dbinom{2n}{n}\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{e^{2n}}\dfrac{(e^n)^2}{(n^n\sqrt{2\pi n})^2}\dfrac{1}{n4^n}$.

Donc $\dbinom{2n}{n}\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, n^{\frac{3}{2}}}$. Et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.

Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n}\dfrac{x^n}{n+1}$ converge normalement donc uniformément sur $\left[\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.

Donc la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{2n}{n}\dfrac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.

Ainsi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{2n}{n}\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} = 2$.

Or $\mathbb{P}(C) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

Ainsi $\mathbb{P}(C) = 1$.

• • • FIN • • •