Concours Commun INP 2022

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

(corrigé)

PROBLÈME 1
Intégrales de Gauß et théorème de Moivre-Laplace

Partie I – Convergence d'une suite

Q 1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $1-t^2 \in [0,1]$. On en déduit que l'application $x \mapsto (1-t^2)^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$; comme $\frac{m+1}{2} \geqslant \frac{m}{2}$, on en déduit :

$$\forall t \in [0,1], \quad \left(1-t^2\right)^{\frac{m+1}{2}} \leqslant \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

et donc, par croissance de l'intégrale :

$$I_{m+1} \leqslant I_m,$$

ce qui démontre que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{m+2} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m+2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties cette dernière intégrale :

- en dérivant l'application $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,1]$ et de dérivée $t \mapsto -2t\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-t^2)^{\frac{m}{2}}$;
- en intégrant l'application $t \mapsto 1$, qui est continue sur $[0,1]$, et dont une primitive est $t \mapsto t$.

On a alors :

$$I_{m+2} = \left[t\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}\right]_0^1 + \int_0^1 2t^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t$$

Comme $\frac{m}{2}+1 \geqslant 1 > 0$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$ est nulle en 1. Le terme entre crochets s'annule donc, et on a :

$$\begin{aligned} I_{m+2} = (m+2)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t &= (m+2)\int_0^1 \left((t^2-1)+1\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t \\ &= -(m+2)\left[\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t\right] \\ &= -(m+2)I_{m+2} + (m+1)I_m. \end{aligned}$$

On en déduit : $(m+3)I_{m+2} = (m+2)I_m$, puis :

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q 3. Nous allons démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\mathrm{P}_n : « \ I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \text{ et : } I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} \ »$$

par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a par un calcul direct :

$$I_{2\times 1} = I_2 = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right) \mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

tandis que, par définition des $a_{k,n}$:

$$\frac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\times 3}\cdot\frac{2^3}{\sqrt{2}\binom{2}{1}} = \frac{2}{3},$$

donc : $I_{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}}$. Pour le calcul de :

$$I_{2\times 1-1} = I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

une stratégie (qui n'est pas la seule : on peut aussi astucieusement intégrer par parties) est d'effectuer le changement de variable $\theta = \arcsin(t)$ (on l'a choisi pour avoir : $1-t^2 = 1-\sin(\theta)^2 = (\cos(\theta))^2$). Il est licite parce que l'arc sinus définit une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,1[$, à valeurs dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On a : $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, et donc :

$$\begin{aligned}I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \\ = \left[\frac{\theta+\sin(2\theta)/2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

tandis que :

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2^3}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{4},$$

donc : $I_{2\times 1-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1}$. On a donc montré :

$$I_{2\times 1} = \frac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}},\quad I_{2\times 1-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1},$$

d'où P_1. On a initialisé la propriété à démontrer.
À présent, soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel qu'on ait P_n. D'après la question précédente (avec $m = 2n$), on a :

$$I_{2(n+1)} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}.$$

On aimerait montrer que c'est égal à $\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}$. Cela nécessite préalablement de comprendre comment faire apparaître $a_{n+1,n+1}$, alors que nous avons $a_{n,n}$ ci-dessus. Trouvons donc une relation entre $a_{n+1,n+1}$ et $a_{n,n}$. Pour cela, remarquons que :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et donc :

$$a_{n,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{2^{2n+3}}{\sqrt{2(n+1)}}a_{n+1,n+1},$$

ou encore, après simplifications :

$$a_{n,n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}a_{n+1,n+1}, \tag{$*$}$$

donc, en reprenant le calcul de $I_{2(n+1)}$ ci-dessus :

$$I_{2(n+1)} = \frac{\cancel{2}(n+1)}{2n+3} \cdot \frac{\sqrt{2\cancel{n}} \cdot \cancel{(2n+1)}}{2\cancel{(2n+1)} \cdot \cancel{2}\sqrt{\cancel{n}(n+1)}a_{n+1,n+1}} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}.$$

Encore en utilisant la question précédente (cette fois avec $m = 2n-1$) et $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}I_{2(n+1)-1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n-1} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} &\overset{(*)}{=} \frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{2}(n+1)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\cancel{n}}} \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{n}(n+1)}}{\cancel{2n+1}} a_{n+1,n+1}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} a_{n+1,n+1}.\end{aligned}$$

On a donc montré, ayant supposé P_n :

$$I_{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}, \quad I_{2(n+1)-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} a_{n+1,n+1},$$

d'où P_{n+1}, ce qui achève l'hérédité. Par principe de récurrence, on a donc le résultat voulu pour tout entier $n \geqslant 1$.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a montré dans la première question que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Donc :

$$I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2}.$$

En principe, il suffit de diviser par $I_{2n} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ pour avoir le résultat voulu, à condition de bien justifier que c'est une quantité strictement positive. C'est vrai par propriété de séparation de l'intégrale, étant donné que l'application $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I_{2n} > 0$, et diviser par I_{2n} donne :

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

Or, d'après la question **Q 2** : $\dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$, et d'après la question précédente :

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} \times \frac{2(2n+1)a_{n,n}}{\sqrt{2n}} = \frac{2(2n+1)\pi}{2n} \left(a_{n,n}\right)^2.$$

D'où le résultat voulu, en divisant par $\frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} > 0$ dans l'encadrement ci-dessus :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

Q 5. D'après l'encadrement de la question précédente, et le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 = 1$, et donc :

$$a_{n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(ce qu'on pouvait aussi trouver grâce à la formule de Stirling). On a donc, pour tout n au voisinage de l'infini :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2 \cdot 2n} \cdot \sqrt{2\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Remarque. Le changement de variable $t = \arcsin(\theta)$, déjà proposé dans la question **Q 2**, permet de démontrer qu'on a : $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2n+1} \mathrm{d}\theta$. On reconnaît les traditionnelles intégrales de Wallis, et l'équivalent asymptotique bien connu.

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauß

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Effectuons le changement de variable $u = t\sqrt{n}$ dans l'intégrale $I_{2n} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$. Il est licite, parce que l'application $t \mapsto t\sqrt{n}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. On a $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$, et donc :

$$I_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}} J_n,$$

donc :

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n},$$

et d'après la question **Q 5** :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où le résultat.

Q 7. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, c'est-à-dire tel que $n > t^2$, on a $t \in [0, \sqrt{n}[$ et donc :

$$u_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t^2.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) = -t^2$. Alors, par continuité de l'exponentielle en $-t^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = e^{-t^2}.$$

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto e^{-t^2}$.

Q 8. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à la fonction exponentielle à l'ordre 1 en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + x + x^2\int_0^1 (1-t)e^{tx}\mathrm{d}t \geqslant 1 + x,$$

du fait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $(1-t)e^{tx} \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Déduisons-en l'inégalité demandée sur u_n. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$. En prenant $x = -\frac{t^2}{n}$, on obtient : $1 - \frac{t^2}{n} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}}$. Or ces quantités sont positives pour $t \in [0,\sqrt{n}]$ donc, en utilisant la croissance de l'application $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$u_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}.$$

De plus, $u_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$ (en effet : $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \iff 0 \geqslant -t^2 \geqslant -n \iff 0 \geqslant -\frac{t^2}{n} \geqslant -1 \iff 1 \geqslant 1 - \frac{t^2}{n} \geqslant 0$), donc l'encadrement de l'énoncé est vérifié pour $t \in [0,\sqrt{n}]$. Si $t \in]n, +\infty[$, on note que l'encadrement est trivial, car u_n est nulle sur cet intervalle et on a $e^{-t^2} \geqslant 0$ pour tout $t \in]\sqrt{n}, +\infty[$: d'où le résultat.

Q 9. Nous allons montrer : $K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$, grâce aux questions précédentes et au théorème de convergence dominée, dont nous récapitulons les hypothèses : pour tout $n \geqslant 1$, l'application u_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, et la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : t \mapsto e^{-t^2}$ qui est également continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après la question précédente :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |u_n(t)| = u_n(t) \leqslant e^{-t^2}. \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Vérifions que l'application $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est effectivement intégrable sur $[0, +\infty[$: elle est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, donc le seul problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$; or elle est positive, et d'après le théorème des croissances comparées on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Donc :

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

et la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ car son exposant est $2 > 1$, donc par comparaison φ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.
Le théorème de convergence dominée s'applique donc. Ceci démontre d'une part que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge, et d'autre part qu'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Faisons à présent le lien avec K. Tout d'abord, le changement de variable $u = \sqrt{2}t$ (choisi de sorte que : $t^2 = \frac{u^2}{2}$), licite parce que l'application $t \mapsto \sqrt{2}t$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, montre que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}} \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u.$$

Rappelons que la formule du changement de variable conserve la nature des intégrales. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Ensuite, le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale du membre de gauche montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge également, et est égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ (on utilise la parité de l'intégrande). On en déduit d'une part que $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t$ converge, et d'autre part, grâce à tout ce qui précède :

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

En définitive, on a bien montré qu'on a : $K = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} J_n$. Or, d'après la question **Q 6**, cette limite est égale à $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$. Par unicité de la limite :

$$K = 1.$$

Remarque. Grâce aux questions précédentes, la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ peut se démontrer rapidement sans le théorème de comparaison. En effet, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, on sait que l'application $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est croissante, et donc qu'elle admet une limite soit finie, soit infinie. Mais elle ne peut être infinie ; sinon, par caractérisation séquentielle de la limite, la suite $\left(\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ aurait aussi une limite infinie, et ce n'est pas le cas d'après la question **Q 6**. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ doit être finie, ce qui prouve la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Partie III – Calcul d'une majoration

Q 10. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\frac{1-x}{1+x} > 0$, et on peut donc poser :

$$g(x) = 2x + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien, pour cette définition de g :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)}.$$

De plus, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 2 en 0 :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - x^3\int_0^1 \frac{(1-t)^2 2!}{2!(1-tx)^3}\mathrm{d}t,$$

et :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\int_0^1 \frac{(1-t)^2 2!}{2!(1+tx)^3}\mathrm{d}t,$$

donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$g(x) = -x^3\int_0^1 (1-t)^2\left(\frac{1}{(1-tx)^3} + \frac{1}{(1+tx)^3}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $1 - \frac{1}{2} \leqslant 1 - tx \leqslant 1$ et $1 \leqslant 1 + tx \leqslant 1 + \frac{1}{2}$, et donc :

$$\underbrace{\frac{1}{(1/2)^3} + \frac{1}{1^3}}_{=9} \geqslant \frac{1}{(1-tx)^3} + \frac{1}{(1+tx)^3} \geqslant \underbrace{\frac{1}{1^3} + \frac{1}{(3/2)^3}}_{=\frac{35}{27}}.$$

On en déduit, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, sans oublier de renverser l'inégalité du fait de la multiplication par $-x^3 \leqslant 0$:

$$-9x^3 \cdot \int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t \leqslant g(x) \leqslant -x^3 \cdot \frac{35}{27}\int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, étant donné que : $\int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$:

$$-3x^3 \leqslant g(x) \leqslant -\frac{35}{27\cdot 3}x^3.$$

On en déduit d'une part que g est négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et d'autre part qu'on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad |g(x)| \leqslant \max\left(3, \frac{35}{27\cdot 3}\right)x^3,$$

d'où le résultat, en posant $M = \max\left(3, \frac{35}{27\cdot 3}\right) = 3$.

Remarque. Sans suivre l'indication de l'énoncé, on peut montrer plus rapidement l'existence de $M \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|g(x)| \leqslant Mx^3$, ainsi : on remarque que l'application $x \mapsto \frac{g(x)}{x^3}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions clairement continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et au voisinage de 0 on a :

$$\frac{g(x)}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{x^3} = -\frac{2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(1),$$

donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^3} = -\frac{2}{3}$, ce qui montre que $x \mapsto \frac{g(x)}{x^3}$ se prolonge en une application continue sur le SEGMENT $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ (nécessairement positif, puisqu'il majore une quantité positive) tel que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad \left|\frac{g(x)}{x^3}\right| \leqslant M,$$

d'où le résultat après multiplication par $x^3 > 0$. Pour $x = 0$, l'inégalité reste trivialement vraie, puisque $g(0) = 0$ et $Mx^3 = 0$.

Q 11. Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$. On a :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{k}}{\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n)!}{(2n-k)!k!}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{n!}{(2n-k)!}\frac{n!}{k!}.$$

Or :

$$\frac{n!}{(2n-k)!} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} j}{\prod\limits_{j=1}^{2n-k} j} = \prod_{j=2n-k+1}^{n} j \overset{[i=n-j]}{=} \prod_{i=0}^{k-n-1}(n-i) = n\prod_{i=1}^{k-n-1}(n-i).$$

Pour comprendre les valeurs prises par l'indice du produit, notez que $2n-k+1 \leqslant j \leqslant n$ équivaut, après opérations élémentaires, à : $0 \leqslant n-j \leqslant -n+k-1$. De même :

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{k} j} \overset{[i=j-n]}{=} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k-n}(n+i)} = \frac{1}{k\prod\limits_{i=1}^{k-n-1}(n+i)}.$$

Par conséquent, en reprenant le calcul plus haut :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \prod_{i=1}^{k-n-1}\frac{n-i}{n+i} \times \frac{n}{k} = \prod_{i=1}^{k-n-1}\frac{1-\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}} \times \frac{n}{k},$$

d'où le résultat.

Q 12. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 \leqslant k \leqslant \frac{3n}{2}+1$. Appliquons la question **Q 10**, avec $x = \frac{i}{n}$, où $i \in [\![1, k-n-1]\!]$. C'est possible puisque, avec ces hypothèses sur i et k, on a bien $\frac{i}{n} \geqslant 0$ et :

$$\frac{i}{n} \leqslant \frac{k-n-1}{n} \leqslant \frac{3n/2+1-n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

On a alors, d'après cette question :

$$\prod_{i=1}^{k-n-1}\frac{1-\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}} \leqslant \prod_{i=1}^{k-n-1} e^{-\frac{2i}{n}+g\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{k-n-1} i} \times e^{\sum\limits_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{-\frac{(k-n-1)(k-n)}{n}} \times e^{\sum\limits_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)}.$$

Posons : $b_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)$. On a alors, d'après ce qui précède et la question précédente :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} \times e^{-\frac{(k-n-1)(k-n)}{n}} \times e^{b_{k,n}},$$

et il reste à montrer qu'on a bien : $|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}(k-n-1)^4$. Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire et la question **Q 10** encore une fois :

$$|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}\sum_{i=1}^{k-n-1} i^3 \leqslant \frac{M}{n^3}\sum_{i=1}^{k-n-1}(k-n-1)^3 = \frac{M}{n^3}\cdot(k-n-1)^3 \times (k-n-1),$$

la dernière majoration se justifiant parce qu'on somme $k-n-1$ fois le nombre $k-n-1$ (qui ne dépend pas de l'indice de sommation). Ainsi :

$$|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}(k-n-1)^4,$$

et :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} e^{b_{k,n}} e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Partie IV – Vers le théorème de Moivre-Laplace

Q 13. On peut obtenir l'espérance et la variance de Z_n sans connaître sa loi, puisqu'on connaît celle de X_n. En effet, X_n suit une loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$, donc elle est d'espérance et de variance finies, et on a : $\mathrm{E}(X_n) = 2n \times \frac{1}{2} = n$, et : $\mathrm{V}(X_n) = 2n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$. Alors, par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(Z_n) = \frac{2\mathrm{E}(X_n) - 2n}{\sqrt{2n}} = 0,$$

et, puisque la variance ne change pas lorsqu'on ajoute une variable aléatoire constante :

$$\mathrm{V}(Z_n) = \mathrm{V}\left(\frac{2X_n}{\sqrt{2n}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2n}}\right)^2 \mathrm{V}(X_n) = \frac{2}{n} \times \frac{n}{2} = 1.$$

Passons à la loi de Z_n. C'est, à translation et dilatation près, une loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$. Plus précisément, on a clairement :

$$Z_n(\Omega) = \left\{\frac{2k-2n}{\sqrt{2n}} \mid k \in X_n(\Omega)\right\} = \left\{\frac{2k-2n}{\sqrt{2n}} \mid k \in [\![0, 2n]\!]\right\},$$

et :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z_n(\omega) = \frac{2k-2n}{\sqrt{2n}} \Longleftrightarrow X_n(\omega) = k,$$

donc :

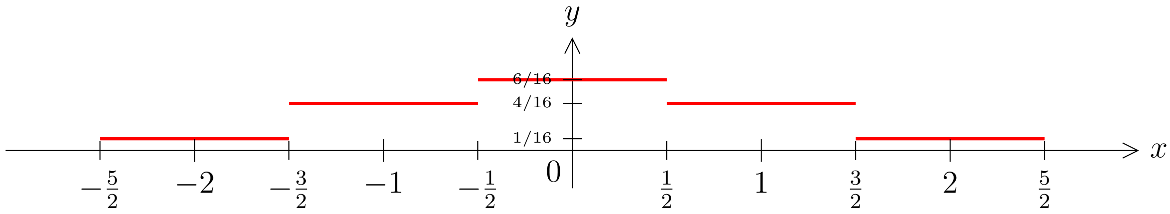
$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \mathrm{P}\left(Z_n = \frac{2k-2n}{\sqrt{2n}}\right) = \mathrm{P}(X_n = k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{2n-k}} = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}},$$

ce qui donne la loi de Z_n.

Q 14. Notons que par définition de h_n, cette application est nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\sqrt{2n}-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$. Pour $n=2$, cela signifie que h_2 est à support dans $\left[-2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}\right[= \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right[$, et sur chacun des intervalles $J_{k,2}$ (qui sont des intervalles de même longueur $2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}=1$, partitionnant $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right[$: cette observation facilite leur représentation), l'application h_2 est constante égale à $\mathrm{P}(X_2=k) = \binom{4}{k}\frac{1}{2^4}$. Connaissant les valeurs de $\binom{4}{k}$ quand k varie :

k	0	1	2	3	4
$\binom{4}{k}$	1	4	6	4	1

on en déduit la représentation graphique suivante de h_2 (en rouge) :



Q 15. La fonction h_n prend un nombre fini de valeurs, à savoir :

$$h_n(\mathbb{R}) = \left\{\frac{\sqrt{2n}}{2}\mathrm{P}(X_n=k) \mid k \in [\![0,2n]\!]\right\}.$$

Puisque $h_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, il admet un plus grand élément, et c'est le maximum de h_n. Montrons que ce maximum est atteint pour tout $t \in J_{n,n}$: puisque $h_n(t) = \frac{\sqrt{2n}}{2}\mathrm{P}(X_n=k)$ si $t \in J_{k,n}$, cela revient à démontrer que $\mathrm{P}(X_n=k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}$ atteint son maximum pour $k=n$, c'est-à-dire que $\binom{2n}{k}$ est maximal pour $k=n$.

Pour cela, nous allons étudier la monotonie de la « suite » $\left(\binom{2n}{k}\right)_{k\in[\![0,2n]\!]}$. Soit $k \in [\![0,2n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}\binom{2n}{k+1} - \binom{2n}{k} &= \frac{(2n)!}{(2n-k-1)!(k+1)!} - \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!}\\ &= (2n)!\left(\frac{2n-k}{(2n-k)!(k+1)!} - \frac{k+1}{(2n-k)!(k+1)!}\right)\\ &= \frac{(2n)!(2n-2k-1)}{(2n-k)!(k+1)!}.\end{aligned}$$

Or : $2n-2k-1 \geqslant 0$ si et seulement si $k \leqslant n-\frac{1}{2}$; c'est en particulier le cas si $k \leqslant n-1$, et pour tout k ainsi choisi on a donc $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} \geqslant 0$: ainsi, la « suite » $\left(\binom{2n}{k}\right)_{k\in[\![0,2n]\!]}$ est croissante sur $[\![0,n]\!]$, et on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

De plus, pour tout $k \in [\![n+1,2n]\!]$, on a $2n-k \leqslant n$ et donc :

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

Finalement, pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$ on a : $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$. Cela montre bien que $\mathrm{P}(X_n=k)$ est maximal pour $k=n$, et donc h_n atteint son maximum en tout réel de $J_{n,n} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$ (donc en 0 en particulier). Il vaut :

$$h_n(0) = \frac{\sqrt{2n}}{2}\mathrm{P}(X_n=n) = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = a_{n,n}.$$

Q 16. On a : $\sqrt{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, donc pour tout n au-delà d'un certain rang, noté n_0, on a : $x\leqslant\sqrt{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Par conséquent, pour tout $n\geqslant n_0$, on a :

$$x\in\left[-\sqrt{2n}-\frac{1}{\sqrt{2n}},\sqrt{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right[=\bigcup_{k=0}^{2n}J_{k,n},$$

donc il existe $k_n\in[\![0,2n]\!]$ tel que : $x\in J_{k_n,n}$, ce qu'il fallait démontrer. Cet entier est unique, car les intervalles $J_{k,n}$ sont disjoints.
Pour en déduire les équivalents demandés, nous allons expliciter un encadrement de $t_{k_n,n}$. On y parvient en notant que pour tout entier $n\geqslant n_0$,

$$x\in J_{k_n,n}\Longleftrightarrow t_{k_n,n}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\leqslant x<t_{k_n,n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

On en déduit, en isolant $t_{k_n,n}$ dans chacune des deux inégalités, que pour tout entier $n\geqslant n_0$:

$$x-\frac{1}{\sqrt{2n}}\leqslant t_{k_n,n}\leqslant x+\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers x. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{k_n,n}=x$. Comme $x\neq0$, cela implique : $t_{k_n,n}\underset{n\to+\infty}{\sim}x$.
Passons à k_n-n et k_n. Pour cela, on rappelle que par définition, on a pour tout entier n non nul :

$$t_{k_n,n}=\frac{2k_n-2n}{\sqrt{2n}}=\frac{2(k_n-n)}{\sqrt{2n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}x.$$

Alors, en isolant k_n-n :

$$k_n-n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2n}x}{2}.$$

Cet équivalent équivaut à :

$$k_n-n=\frac{\sqrt{2n}x}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n}\right)=\underset{n\to+\infty}{o}(n).$$

On en déduit :

$$k_n=n+\underset{n\to+\infty}{o}(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n.$$

Ainsi on a bien montré :

$$k_n-n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x\sqrt{2n}}{2}\ ,\ t_{k,n}\underset{n\to+\infty}{\sim}x\ ,\ k_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n.$$

Q 17. Soit $k\in[\![0,2n]\!]$. Comme $t_{k,n}\in\left[t_{k,n}-\frac{1}{\sqrt{2n}},t_{k,n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right[=J_{k,n}$, on a par définition de h_n :

$$h_n\left(t_{k,n}\right)=\frac{\sqrt{2n}}{2}\mathrm{P}(X_n=k)=\frac{\sqrt{2n}}{2}\binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{k}=a_{k,n}.$$

Déduisons-en la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant1}$. Comme h_n est paire pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ (cela tient au fait que $\binom{2n}{k}=\binom{2n}{2n-k}$ pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$, et de l'équivalence facile à vérifier : $x\in J_{k,n}\Longleftrightarrow -x\in J_{2n-k,n}$, une fois qu'on a remarqué que $-t_{k,n}=t_{2n-k,n}$), il suffit de faire l'étude sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Si $x=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a :

$$h_n(x)=h_n(0)\overset{[\mathbf{Q\,15}]}{=}a_{n,n}\underset{n\to+\infty}{\overset{[\mathbf{Q\,5}]}{\longrightarrow}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Étudions à présent la convergence de $(h_n(x))_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $x>0$. On rappelle que d'après la question précédente, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x \in J_{k_n,n}$. Soit $n \geqslant n_0$. Comme h_n est constante sur $J_{k_n,n}$, et que $t_{k_n,n} \in J_{k_n,n}$, on peut écrire :

$$h_n(x) = h_n(t_{k_n,n}) = a_{k_n,n}.$$

Nous aimerions utiliser la question **Q 12** pour en déduire le comportement asymptotique de $(a_{k_n,n})_{n\geqslant 1}$, celui de $(a_{n,n})_{n\geqslant 1}$ étant connu. Cela nécessite de vérifier qu'on a bien : $n+1 \leqslant k_n \leqslant \frac{3n}{2}+1$. Or, d'après la question précédente : $k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} > 0$, donc pour tout n suffisamment grand on a : $k_n - n > 0$, c'est-à-dire (puisque k_n et n sont entiers) : $k_n \geqslant n+1$. Toujours grâce à cet équivalent, on a :

$$\frac{k_n - n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc pour tout n suffisamment grand on a : $\frac{k_n-n}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, et on en déduit : $k_n \leqslant \frac{3n}{2} \leqslant \frac{3n}{2}+1$. En résumé, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a : $n+1 \leqslant k_n \leqslant \frac{3n}{2}+1$, donc d'après la question **Q 12**, pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k_n} \times e^{b_{k_n,n}} \times e^{-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n)},$$

où $b_{k_n,n}$ vérifie : $|b_{k_n,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}\,(k_n-n-1)^4$.
Étudions le comportement asymptotique de chaque terme de ce produit. Tout d'abord, d'après la question précédente on a : $k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc : $\frac{n}{k_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. De plus : $k_n - n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après l'équivalent ci-dessus, donc -1 est négligeable devant $k_n - n$, et on en déduit :

$$\frac{M}{n^3}\,(k_n-n-1)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{M}{n^3}\,(k_n-n)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{M}{n^3}\left(\frac{x\sqrt{2n}}{2}\right)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{Mx^4}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{k_n,n} = 0$. Par continuité de l'exponentielle en 0, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{b_{k_n,n}} = 1$. Cette étude permet déjà d'écrire :

$$\frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n)},$$

et il reste à étudier le comportement asymptotique de cette exponentielle. Pour cela, on note que :

$$-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(k_n-n)^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{x\sqrt{2n}}{2}\right)^2}{n} = -\frac{x^2}{2}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n)} = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Or $a_{n,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc finalement :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n,n} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

On note que l'égalité reste valable pour $x=0$, au vu de ce qu'on avait trouvé en début d'étude, et par l'argument de parité invoqué plus haut (et renforcé par le fait que $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ soit aussi paire) ce calcul de limite vaut finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En conclusion, on a démontré que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

PROBLÈME 2
Factorisation QR

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

Q 18. Puisque A est de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles à un même vecteur colonne, qu'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Notons $y_1, \ldots, y_n$ les coefficients de proportionnalité, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_2x_1 & \cdots & y_nx_1 \\ y_1x_2 & y_2x_2 & \cdots & y_nx_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1x_n & y_2x_n & \cdots & y_nx_n \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

On reconnaît, suivant les règles de calcul matriciel : $A = XY^T$, et de plus X et Y ne sont pas nuls (sinon l'égalité précédente impliquerait : $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$, ce qui est impossible pour une matrice rang non nul). D'où le résultat.

Q 19. On reprend les notations $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Le même calcul que dans la question précédente montre que toutes les colonnes de XY^T sont proportionnelles à X ; l'espace vectoriel engendré par les colonnes de XY^T est donc inclus dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$, et comme le rang de XY^T est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, on en déduit : $\mathrm{rang}\left(XY^T\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)\right) = 1$. Mais il n'est pas égal à 0, car XY^T admet au moins une colonne non nulle : en effet, Y est non nul, donc ce vecteur colonne admet au moins une coordonnée non nulle : soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_i \neq 0$. Alors la i^{e} colonne de XY^T, qui est égale à y_iX, est non nulle car $y_i \neq 0$ et $X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
Ainsi $\mathrm{rang}\left(XY^T\right) \leqslant 1$ et $\mathrm{rang}\left(XY^T\right) \neq 0$, donc nécessairement : $\mathrm{rang}\left(XY^T\right) = 1$.

I.2 – Quelques propriétés

Q 20. Comme A est de rang 1, d'après la question **Q 18** il existe $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que : $A = XY^T$. On reprend les mêmes notations que dans les questions précédentes, pour les coordonnées de X et Y (la matrice A a donc l'expression en $(*)$). Alors, par associativité de la multiplication matricielle :

$$A^2 = (XY^T)(XY^T) = X(Y^TX)Y^T,$$

et on reconnaît le produit scalaire usuel de X et Y, qui est égal à :

$$Y^TX = \langle Y, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i \overset{(*)}{=} \mathrm{tr}(A),$$

puisqu'on reconnaît là la somme des coefficients diagonaux de A. On a donc montré :

$$A^2 = X \cdot \underbrace{\mathrm{tr}(A)}_{\in\mathbb{R}} \cdot Y^T = \mathrm{tr}(A)XY^T = \mathrm{tr}(A)A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q 21. Après multiplication par A^{k-1}, l'égalité de la question précédente donne : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^{k+1} = \operatorname{tr}(A)A^k$. Si l'on raisonne comme dans le cas des suites numériques, cela semble indiquer que $\left(A^k\right)_{k\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont la raison serait $\operatorname{tr}(A)$, et on en déduirait : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^k = (\operatorname{tr}(A))^{k-1}A$. Nous allons démontrer cette conjecture par récurrence sur k.

L'initialisation est évidente, puisque pour $k = 1$ cette égalité équivaut à $A = A$. Montrons donc l'hérédité : soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait : $A^k = (\operatorname{tr}(A))^{k-1}A$. En multipliant par A cette égalité, on a :

$$A^{k+1} = (\operatorname{tr}(A))^{k-1}A^2 \overset{[\mathbf{Q\,20}]}{=} (\operatorname{tr}(A))^{k-1} \cdot \operatorname{tr}(A)A = (\operatorname{tr}(A))^{(k+1)-1}A,$$

d'où la propriété au rang $k+1$, ce qui démontre qu'elle est héréditaire.

Ainsi, par principe de récurrence, on a montré :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad A^k = (\operatorname{tr}(A))^{k-1}A.$$

Q 22. Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Rappelons que A est non nulle, puisque de rang $1 \neq 0$. Par la question précédente, on a donc clairement :

$$A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \iff (\operatorname{tr}(A))^{k-1} = 0 \iff k \geqslant 2 \text{ et : } \operatorname{tr}(A) = 0.$$

Ainsi A est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 0$, et dans ce cas l'indice de nilpotence (c'est-à-dire : le plus petit exposant à donner une puissance nulle) est $k = 2$.

Q 23. La question **Q 20** montre que $X^2 - \operatorname{tr}(A)X = X(X - \operatorname{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A. C'est un polynôme scindé, et si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ alors il est à racines simples d'après la factorisation qui précède, donc d'après le critère polynomial de diagonalisation A est diagonalisable dans ce cas-là.

Ainsi une condition suffisante pour que A soit diagonalisable, est que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$. Nous allons démontrer que cette condition est nécessaire : supposons A diagonalisable. Alors, d'après le critère de diagonalisation, χ_A est scindé, et pour toute valeur propre de A, son ordre de multiplicité est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Or A est de rang 1, donc d'après le théorème du rang on a : $\dim(\ker(A)) = n - 1$. Comme $n \geqslant 2$ par hypothèse, on a $\dim(\ker(A)) > 0$, donc 0 est valeur propre de A, d'ordre de multiplicité exactement $n-1$. Comme A admet exactement n valeurs propres en comptant les multiplicités, il existe une autre valeur propre $\lambda \neq 0$, qui doit être d'ordre de multiplicité 1 vu que 0 est déjà d'ordre de multiplicité $n-1$. Alors, comme la trace d'une matrice réelle est la somme de ses valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicités, on a :

$$\operatorname{tr}(A) = (n-1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda \neq 0,$$

d'où le résultat : si A est diagonalisable, alors $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est donc : $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

Q 24. Dans cette question, et la suivante, je vais illustrer comment la géométrie permet d'abréger la partie calculatoire de l'étude, par anticipation sur la partie II.2.

On note que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel (ne pas oublier le $\frac{1}{3}$ en facteur, qui assure que les colonnes sont de norme 1). On en déduit que A est une matrice orthogonale, et donc : $A^T A = \mathrm{I}_3$. Or A est clairement symétrique, donc l'égalité précédente devient : $A^2 = \mathrm{I}_3$. On a montré :

$$A^2 = \mathrm{I}_3,$$

et donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A.

Q 25. La question précédente veut peut-être nous inciter à utiliser le fait que X^2-1 soit un polynôme annulateur de A, pour en déduire que les valeurs propres sont éventuellement 1 et -1. Mais nul besoin de ce surcroît de théorie : contentons-nous de remarquer qu'on a montré, dans la question précédente, que : $A^2 = \mathrm{I}_3$. Ainsi A est une matrice de symétrie, or on sait qu'une telle matrice est diagonalisable et a pour valeurs propres éventuelles 1 et -1. Donc :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \{1, -1\}.$$

On peut montrer que 1 et -1 sont effectivement valeurs propres, et même déterminer leurs ordres de multiplicité, grâce à la trace. En effet, si l'on note a et b leurs ordres de multiplicité (qu'on pose comme étant nuls si ce ne sont pas effectivement des valeurs propres), alors le critère de diagonalisation implique : $a+b = \dim(\ker(A-\mathrm{I}_3)) + \dim(\ker(A+\mathrm{I}_3)) = 3$. Mais on a aussi, en examinant la trace, qui est la somme des coefficients diagonaux mais aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités : $\mathrm{tr}(A) = 1 = a-b$. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & +b & = & 3 \\ a & -b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} a & +b & = & 3 & \\ 2a & & = & 4 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{array}\right.$$

et on en déduit : $a = 2$, $b = 1$. Ainsi 1 est valeur propre double (car son ordre de multiplicité est $a = 2$), et -1 est valeur propre simple. Je vais d'abord déterminer le sous-espace propre associé à -1 (c'est en principe plus facile, vu qu'il est de dimension 1 : trouver un seul vecteur propre non nul suffit à l'engendrer) : comme A est une matrice symétrique réelle, on sait que ses sous-espaces propres sont orthogonaux. On en déduira alors le sous-espace propre associé à 1 en considérant le supplémentaire orthogonal du premier sous-espace propre. Or on a :

$$A + \mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et la relation $C_1 + C_2 = C_3$ montre que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $A + \mathrm{I}_3$. Par l'argument dimensionnel ci-dessus on a donc :

$$\ker(A+\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Par l'argument d'orthogonalité évoqué, on en déduit :

$$\ker(A-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Q 26. La matrice A est symétrique réelle, donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Q 27. Il s'agit de diagonaliser A, en prenant une matrice de passage orthogonale : pour cela, il suffit de prendre une matrice de passage entre deux bases orthonormées, en l'occurrence la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ et une base orthonormée de vecteurs propres. Pour cette dernière : comme les deux sous-espaces propres de A sont supplémentaires orthogonaux, concaténer des bases orthonormées des sous-espaces propres donne une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (constituée de vecteurs propres de A). Or la base de $\ker(A-\mathrm{I}_3)$ trouvée ci-dessus n'est pas orthonormée ni même orthogonale : on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour y remédier. On obtient alors la base suivante de $\ker(A-\mathrm{I}_3)$, orthonormée cette fois-ci :

$$\ker(A-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Ceci étant dit : soit $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. D'après les questions précédentes et la discussion ci-dessus, la famille (X_1, X_2, X_3) est bien une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et constituée de vecteurs propres de A (respectivement associés à -1, 1 et 1). D'après la formule du changement de base, appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A et aux bases $\mathcal{B}_{can}$ et $\mathcal{B}$, on a donc :

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{can}}(\mathcal{B}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{can}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1},$$

d'où le résultat en posant $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, qui est une matrice orthogonale d'après l'argument plus haut (ce qui permet notamment d'écrire : $P^{-1} = P^T$), et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 28. Les questions précédentes montrent que A est une matrice symétrique (réelle), et une matrice de symétrie : c'est donc une matrice de symétrie orthogonale, par rapport à $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ que nous avons déterminé tantôt, et qui est égal au plan $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

II.2 – Matrices de Householder

Q 29. En appliquant les résultats de la partie I.1 avec $X = Y = \frac{1}{\|V\|} V$ (qui est non nul par hypothèse), on voit immédiatement que $P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T$ est une matrice de rang 1 : son image est donc de dimension 1, et un seul vecteur non nul suffit à l'engendrer. Or :

$$P_V V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T \cdot V = \frac{1}{\|V\|^2} V \cdot \|V\|^2 = V,$$

donc : $V = P_V V \in \mathrm{im}(P_V)$, et V est non nul, donc par l'argument dimensionnel ci-dessus on a : $\mathrm{im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$.

Pour déterminer le noyau, on note que P_V est une matrice symétrique, puisque :

$$P_V^T = \frac{1}{\|V\|^2} \left(V V^T \right)^T = \frac{1}{\|V\|^2} (V^T)^T V^T = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T = P_V.$$

On en déduit que son image et son noyau sont supplémentaires orthogonaux, et on a : $\ker(P_V) = \mathrm{im}(P_V)^\perp = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Q 30. On a déjà observé que P_V est une matrice symétrique. Il suffit donc de montrer que c'est un projecteur, pour en déduire que c'est un projecteur orthogonal. Or c'est une matrice de rang 1, donc d'après la question **Q 20**, on a : $(P_V)^2 = \mathrm{tr}(P_V) P_V$. En fait, en regardant de plus près la résolution de la question **Q 20** (avec $X = Y = \frac{1}{\|V\|} V$), on a : $\mathrm{tr}(P_V) = \frac{1}{\|V\|^2} V^T V = \frac{1}{\|V\|^2} \|V\|^2 = 1$, donc finalement : $(P_V)^2 = P_V$. Ainsi P_V est une matrice de projecteur, et est symétrique, donc est une matrice de projecteur orthogonal, sur $\mathrm{im}(P_V)$. D'après la question précédente, P_V est donc la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(V)$. Ce qui précède montre en passant :

$$\mathrm{rang}(P_V) = 1, \quad \mathrm{tr}(P_V) = 1.$$

Q 31. On a montré que P_V est symétrique. De plus I_n est aussi une matrice symétrique, donc Q_V également en tant que combinaison linéaire de matrices symétriques. Montrons qu'elle est orthogonale. On a :

$$Q_V^T Q_V = Q_V^2 = (\mathrm{I}_n - 2P_V)^2\,,$$

et comme I_n et P_V commutent, on en déduit :

$$Q_V^T Q_V = \mathrm{I}_n - 2\cdot 2P_V + (2P_V)^2 = \mathrm{I}_n - 4P_V + 4P_V^2.$$

Or $P_V^2 = P_V$ d'après la question précédente, donc finalement :

$$Q_V^T Q_V = \mathrm{I}_n - 4P_V + 4P_V = \mathrm{I}_n,$$

ce qui montre que Q_V est orthogonale : d'où le résultat.

Q 32. La question précédente montre que $Q_V^2 = \mathrm{I}_n$ et $Q_V^T = Q_V$: c'est donc une matrice de symétrie, et une matrice symétrique : c'est une matrice de symétrie orthogonale. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, il suffit de déterminer $\ker(Q_V - \mathrm{I}_n)$. Or, si $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$X \in \ker(Q_V - \mathrm{I}_n) \iff Q_V X = X \iff (\mathrm{I}_n - 2P_V)\,X = X \iff 2P_V X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X \in \ker(P_V),$$

donc : $\ker(Q_V - \mathrm{I}_n) = \ker(P_V)$, et ce noyau est égal à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$ d'après la question **Q 29**. Ainsi Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Remarque. C'est un fait classique que si P est une matrice carrée, alors P est une matrice de projecteur si et seulement si $S = 2P - \mathrm{I}_n$ est une matrice de symétrie, avec les mêmes caractéristiques géométriques. Cela donne directement ce qu'on veut dans les deux questions précédentes, si l'on prend $P = P_V$ et $S = -Q_V$ (noter que S et $-S$ ont des caractéristiques géométriques « opposées »).

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Q 33. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\|X - U\| = \|X - V\| &\iff \|X - U\|^2 = \|X - V\|^2 \\
&\iff \|X\|^2 - 2\langle X, U\rangle + \|U\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, V\rangle + \|V\|^2 \\
&\iff \langle X, U\rangle = \langle X, V\rangle \qquad \text{(car } \|U\| = \|V\|\text{)} \\
&\iff \langle X, U - V\rangle = 0 \\
&\iff X \perp U - V \\
&\iff X \in D^\perp,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Noter la similitude entre le résultat démontré, et ce fait bien connu des jeunes géomètres : la médiatrice d'un segment (i.e. la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu) est l'ensemble des points à équidistance de ses extrémités.

Q 34. On remarque que $X = U + V$ vérifie bien : $\|X - U\| = \|X - V\|$, puisque en effet :

$$\|(U + V) - U\| = \|V\| = \|U\| = \|(U + V) - V\|.$$

Donc, d'après la question précédente : $U + V \in D^\perp$. Il suffit donc d'écrire :

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}\,(U - V)}_{\in D} + \underbrace{\frac{1}{2}\,(U + V)}_{\in D^\perp}$$

pour avoir la décomposition demandée dans la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q 35. Comme U et V ne sont pas colinéaires, $U-V$ est non nul en particulier, et on peut donc bien appliquer les résultats de la partie II.2 avec $U-V$ au lieu de V.

On rappelle que Q_{U-V} est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(U-V)^{\perp} = D^{\perp}$ (et donc, implicitement : parallèlement à $\mathrm{Vect}(U-V) = D$). On a donc :

$$\forall X \in D,\ Q_{U-V}X = -X, \quad \text{et :} \quad \forall X \in D^{\perp},\ Q_{U-V}X = X.$$

Or $U-V \in D$ et $U+V \in D^{\perp}$ d'après la question précédente, donc :

$$Q_{U-V}(U-V) = -(U-V), \quad Q_{U-V}(U+V) = U+V.$$

On en déduit, en écrivant $U = \frac{1}{2}(U-V) + \frac{1}{2}(U+V)$:

$$Q_{U-V}U = \frac{1}{2}\left(Q_{U-V}(U-V) + Q_{U-V}(U+V)\right) = \frac{1}{2}\left(-(U-V) + (U+V)\right) = V.$$

Q 36. Il y a une erreur d'énoncé : si $\tilde{U} \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\tilde{V} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, alors $Q\tilde{U}$ ne peut pas être colinéaire à $\tilde{V}$. En effet, si $Q\tilde{U}$ est colinéaire à $\tilde{V} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, alors $Q\tilde{U} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Or une matrice orthogonale est inversible, et son noyau est en particulier trivial, donc $Q\tilde{U} \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ dès que $\tilde{U} \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: on a donc une absurdité. À mon avis, l'énoncé nous demande de considérer $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul**. C'est en tout cas ce que je suppose ci-dessous.

Soient $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\tilde{V}$ non nul. S'ils sont colinéaires, le résultat demandé est évident : si $\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (sous ces hypothèses, on peut toujours se ramener à une relation de dépendance linéaire de cette forme), alors en prenant $Q = \mathrm{I}_n$ (qui est orthogonale), on a bien : $Q\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$, et donc $Q\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont colinéaires.

Traitons à présent le cas où ils ne sont pas colinéaires (en particulier, $\tilde{U}$ est non nul également), et posons : $U = \frac{1}{\|\tilde{U}\|}\tilde{U}$, et : $V = \frac{1}{\|\tilde{V}\|}\tilde{V}$. Alors : $\|U\| = 1$, $\|V\| = 1$, donc U et V sont de même norme, et ils ne sont pas colinéaires car $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ ne le sont pas. Alors, d'après la question précédente, on a : $Q_{U-V}U = V$, donc :

$$Q_{U-V}\tilde{U} = \|\tilde{U}\|Q_{U-V}U = \|\tilde{U}\|V = \|\tilde{U}\| \cdot \frac{1}{\|\tilde{V}\|}\tilde{V}.$$

En posant : $\lambda = \frac{\|\tilde{U}\|}{\|\tilde{V}\|}$, on a alors : $Q_{U-V}\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$. D'où le résultat avec $Q = Q_{U-V}$.

Dans tous les cas, on a montré l'existence d'une matrice orthogonale Q telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

Q 37. Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On applique la question précédente avec $\tilde{U} = AE_1$ et $\tilde{V} = E_1$ (qui est bien non nul). Il existe alors une matrice orthogonale Q_1 telle que $Q_1(AE_1)$ soit colinéaire à E_1 ; soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $Q_1AE_1 = \alpha E_1$. Comme Q_1AE_1 est la première colonne de Q_1A, le fait que Q_1AE_1 soit égal à αE_1 nous donne bien :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec $C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ (les $n-1$ dernières colonnes sont les images par Q_1A des vecteurs $E_2, \ldots, E_n$, dont l'expression est inutile pour répondre à cette question), ce qu'il fallait démontrer.

Q 38. Conformément à l'indication de l'énoncé, nous allons montrer que la proposition suivante est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{P}_n : \text{« pour toute matrice } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \text{ il existe } Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } QA \text{ soit triangulaire supérieure. »}$$

par récurrence sur n.
L'initialisation découle directement de la question précédente : si $n = 2$ et si $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, alors d'après la question précédente il existe $Q_1 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que : $Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c_1 \in \mathbb{R}$. C'est effectivement une matrice triangulaire supérieure, d'où P_2.
À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel qu'on ait P_n. Soit $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On applique la question précédente. Il existe $Q_1 \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C_1 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à C_1, qui est d'ordre n. Il existe donc $Q_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $T = Q_2 C_1$ soit triangulaire supérieure. Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, car T l'est. On en déduit que si l'on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1,$$

qui est bien orthogonale en tant que produit de matrices orthogonales (car Q_1 et Q_2 le sont ; nous laissons le lecteur se convaincre que $\begin{pmatrix} 1 & 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix}$ l'est également), alors QA est triangulaire supérieure, ce qui démontre la proposition au rang $n + 1$. D'où l'hérédité.
Par principe de récurrence, on a montré que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA soit triangulaire supérieure.