Vingt-quatre théorèmes fondamentaux

Enfin, en 945/999/972...

1 Théorème de la première question

Range moi ces epsilons.
On est entre gens sérieux : la première question est forcément assez élémentaire.

2 Théorème de la question $n-1$

Vous ne voyez pas comment traiter la question n ? Ralala, si seulement une piste avait été donnée plus tôt...

3 Théorème de la question $n+1$

Avant d'y passer, vérifiez que vous avez vraiment traité la question n : le résultat est-il encadré ? Répond-il vraiment à la question posée ? (Spoiler : non)

4 Théorème de la dernière question

C'est la synthèse ; elle n'est pas forcément difficile, après l'analyse qui a été le cœur des 8 questions précédentes.

5 Théorème de la page impaire

Commencer un calcul en bas d'une page impaire (qu'il va donc falloir tourner) conduit avec bonne probabilité à un calcul loupé.

6 Théorème du vélo

Les calculs c'est comme le vélo : si on va trop vite on tombe, mais si on va trop lentement, aussi.

7 Théorème de l'implication, de l'équivalence et du quantificateur

Cette implication est absurde : vous vouliez dire « donc ». Cette équivalence est fausse (et serait absurde si elle était vraie) : vous vouliez dire « donc ». Ce $\forall$ est absurde : vous vouliez dire « Fixons $x_0 \in E$ ».

8 Théorème du rond

$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$. Et réciproquement.

9 Théorème de la dérivée difficile

$(f\,(g(x)))'$ ne vaut pas toujours $f'\,(g(x))$.

10 Théorème de la primitive

Primitiver f consiste à écrire $f = (\cdots)'$ puis chercher un truc à mettre entre les parenthèses, puis vérifier comment ledit truc se dérive, et non écrire $\displaystyle\int f(t)dt = \cdots$ puis aller chercher dans votre mémoire la bonne case du bon tableau dérivées/primitives.
Bref : savoir primitiver, c'est d'abord savoir bien dériver et procéder par essais/erreurs.

11 Théorème de la primitive difficile

On doit pouvoir trouver un truc qui se dérive (dans un premier temps à peu presque, puis un peu plus précisément, puis exactement) en $\dfrac{19t}{(5+15t^2)^{3/2}}$.

12 Théorème de l'intégrale importante

$$\int_0^1 t^{10}dt = \frac{1}{11}.$$

13 Théorème de l'inégalité stricte

— Boudiou de boubiou, on t'avait demandé une inégalité LARGE.
— Ta preuve est FAUSSE.
— D'ailleurs même l'inégalité stricte est FAUSSE (regarde en $x = 0$).
— On t'a dit 1000 fois de te concentrer sur les inégalités LARGES.

14 Théorème de la majoration

Pour majorer un truc, on écrit le truc, suivi du signe $\leqslant$
Souvent, le reste suit sans mal : votre main va continuer toute seule.
Exemples :

$$\ln(1+u) \leqslant ...$$

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(nt)dt\right| \leqslant ...$$

15 Théorème faux du passage d'inégalités à la limite mais seulement le membre de droite parce que celui de gauche ça ne nous arrange vraiment pas, alors bon...

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors par passage du membre de droite de l'inégalité à la limite : $u_n \leqslant \ell$.

16 Théorème (mais pas trop) du rang

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont supplémentaires.

17 Théorème 1–2–3–4–5

Pour écrire la matrice d'une application dans une base (ou entre deux bases) :

1. on ouvre une grande parenthèse à gauche ;
2. on la ferme un peu plus loin à droite ;
3. on écrit des machins en haut de ce qui deviendra la matrice ;
4. on écrit des machins à droite ;
5. après d'éventuels petits calculs, on écrit des coefficients dans la matrice.

18 Théorème des deux index

Les produits de matrices se font avec deux doigts, et optionnellement avec la formule

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

De fait, quand vous faites ce calcul avec un seul doigt ou – pire – seulement avec vos yeux qui basculent à grande vitesse d'une matrice à l'autre, c'est plus lent, plus difficile, et plus faux.

19 Deuxième théorème des deux index

$$(X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab$$

Le bac est maintenant loin derrière vous ; on ne développe plus les produits n'importe comment : on ordonne/range les choses à la volée en réfléchissant D'ABORD à la tête des termes qui vont apparaître.

20 Théorème du poulpe (généralisation du précédent)

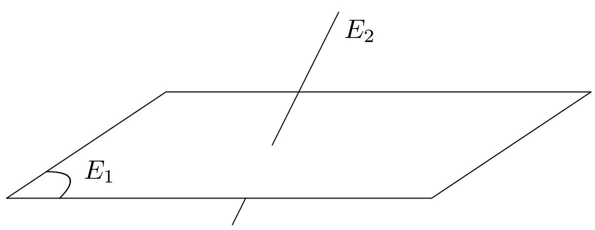
Quand on développe

$$K(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)...(X - \alpha_n)$$

le coefficient constant vaut ... et celui devant X^{n-1} vaut ...

21 Grand théorème de l'algèbre linéaire

Pour comprendre la géométrie du problème on commence par faire ce dessin, puis on plisse les yeux :



22 Théorème de la base adaptée

Pour résoudre un problème d'algèbre linéaire, on construit une base adaptée au problème, et c'est presque terminé.
Ce théorème est souvent associé au précédent.

23 Théorème de la projection

Tant qu'on n'a pas compris ce dessin/qu'on est pas capable de le faire les yeux fermés, on n'a pas compris ce qu'est une projection.

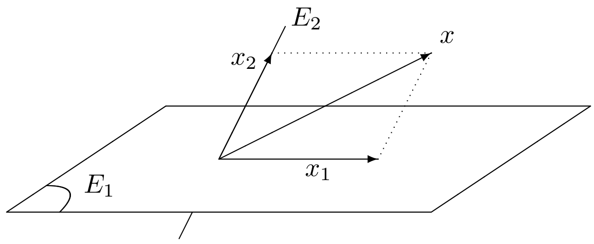


FIGURE 1 – $x \in E_1 + E_2$ mais $x \notin E_1 \cup E_2$

24 Théorème de la base canonique

Elle ne l'est absolument pas : ça n'a pas de sens dans un espace quelconque !
OK, si on est explicitement *dans* $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ *voire* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on en recause.*