On ne prolonge pas une dérivée

1 Le problème

Dans certaines situations, on peut s'intéresser à une fonction dont la régularité est évidente « d'après les théorèmes usuels » sauf en un point, où elle a été définie par un rafistolage :

$$f(x) = \begin{cases} \texttt{une formule} & \text{si } x \neq x_0 \\ \texttt{une valeur} & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Parfois même on se donne une fonction définie partout sauf en un point, et il s'agit de la prolonger en ce point (c'est-à-dire définir l'image de ce point, produisant une nouvelle fonction définie sur un domaine plus gros ; on change alors son nom, ou pas...).
Le problème est alors en général de montrer que la nouvelle fonction est régulière : continue, dérivable, $\mathcal{C}^1$...

— Montrer que l'application sinc : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

— Montrer que l'application $\psi : x \in]0, \pi/2] \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Bien entendu, dire que l'éventuelle fonction f prolongée est dérivable en x_0 ne consiste évidemment pas à dire qu'on peut prolonger f', puisque...

On ne prolonge pas une dérivée

Sur les deux exemples précédents :

— Pour sinc (la fonction « sinus cardinal ») il s'agit de montrer qu'elle est continue, dérivable, et que sa dérivée est continue : ce sont bien trois choses différentes. Il est essentiel de bien comprendre la phrase précédente.

— Pour ψ, il s'agit de montrer qu'elle possède une limite finie en 0 ; on prolonge alors ψ en définissant l'image de 0 (à savoir : la limite trouvée précédemment). On prouve ensuite que cette nouvelle fonction (continue par construction) est dérivable en 0, **puis** que la dérivée est continue en 0.

2 La démarche

— S'il s'agit de montrer la continuité d'une fonction déjà définie en x_0, alors on montrer que l'expression valable en dehors tend bien vers ce qu'il faut quand x tend vers x_0, avec $x \neq x_0$. S'il s'agit de montrer que la fonction peut être prolongée en x_0, on montre que l'expression admet une limite finie ℓ en x_0. En définissant alors $f(x_0) = \ell$ on obtient alors une fonction définie en x_0. S'il faut changer le nom, ce qui peut être vu comme prudent, mais sera casse-pieds, on définira une nouvelle fonction sous la forme $\widetilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

— Disposant maintenant d'une fonction continue en x_0, disons f, il s'agit de montrer qu'elle est dérivable en x_0 : ce sera typiquement obtenu en montrant qu'on dispose d'un développement limité à l'ordre 1 : $f(x_0 + u) = f(x_0) + au + o(u)$. On peut alors conclure que f est dérivable en x_0, avec $f'(x_0) = a$. Ceux qui ont fait le choix audacieux de renommer la fonction $\widetilde{f}$ prendront garde à écrire $(\widetilde{f})'(x_0)$ et non $\widetilde{f}'(x_0)$ « bien entendu ».

— Il reste à montrer que f' est continue en x_0, c'est-à-dire : $f'(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} f'(x_0)$ (parfois on a besoin d'une limite à droite ou gauche, si x_0 est au bord de l'intervalle).

— Il existe un théorème intelligent mais maudit et dont le nom (ce n'est pas de la faute de ceux qui l'utilisent !) est dramatiquement trompeur. Il dit que si f est continue en un point, dérivable en dehors et que la dérivée possède une même limite finie à droite et à gauche de ce point, alors f est dérivable en ce point (et accessoirement de dérivée continue, ce qui est un détail). Vous l'aurez compris, il s'agit de ce machin parfois nommé « théorème de prolongement de la dérivée », ce qui est bien entendu fort caustique, puisqu'il paraît que...

On ne prolonge pas une dérivée

Bien que mal compris et mal nommé, ce théorème maudit est de preuve très simple dès qu'on a compris qu'il faut montrer une dérivabilité à la main : la pente qui nous intéresse s'écrit comme une dérivée, grâce au théorème des accroissements finis.

— Il y a une version « améliorée» du théorème précédent (mais le nom reste le même...) qui raconte que si f est définie sur $]a, b]$, dérivable sur cet intervalle, et que f' possède une limite finie ℓ en a, alors f possède également une limite finie en a^+,et le prolongement obtenu est dérivable (et de dérivée continue) en a. Le point subtil est l'existence de la limite finie pour ℓ : c'est bien plus délicat que le simple théorème des accroissements finis. Ça constitue un bel exercice qui peut avoir du sens dans certains cadre. Mais pas pour nous a priori.

3 Quelques exemples

1. Dans le cas de la fonction sinc :
   — L'équivalent $\sin x \sim x$ donne $\operatorname{sinc}(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 1 = \operatorname{sinc}(0)$, donc sinc **est continue en** 0.

   — Le développement limité $\sin x = x + o(x^2)$ fournit $\operatorname{sinc}(x) = 1 + o(x) = \operatorname{sinc}(0) + 0 \times x + o(x)$ donc sinc **est dérivable en** 0, avec $\operatorname{sinc}'(0) = 0$.

   — Pour $x \neq 0$ on a $\operatorname{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin x}{x^2}\cdot$ Le développement limité à l'ordre 2
   $$x\cos(x) - \sin x = x\,(1 + o(x)) - \left(x + o(x^2)\right) = (1-1)\,x + o(x^2)$$
   nous dit que $\operatorname{sinc}'(x) = o(1)$ donc $\operatorname{sinc}'(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0 = \operatorname{sinc}'(0)$: sinc' **est continue en** 0.

   Finalement, sinc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Avec des arguments de séries entières on pourra plus tard dire que sinc *est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais c'est une autre affaire.*

2. Dans le cas de la fonction $\psi : x \in]0, \pi/2] \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$:
   — On a pour pour tout $x \neq 0$:
   $$\psi(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}\cdot$$
   Le dénominateur est équivalent à x^2 et le numérateur vaut $\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc est équivalent à $\dfrac{x^3}{6}$. Ceci nous assure que $\psi(x) \sim \dfrac{x^3}{6}$ donc $\psi(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
   On peut donc prolonger ψ en une fonction continue en 0 en posant $\psi(0) = 0$.
   On aura noté l'utilisation limpide des équivalents (et un passage par un développement limité élémentaire). Vouloir les éviter n'est PAS une bonne idée.

   — L'équivalent précédent peut maintenant se réécrire :
   $$\psi(x) = \psi(0) + \frac{1}{6}x + o(x),$$
   ce qui nous dit que ψ **est dérivable en** 0**, avec** $\psi'(0) = \dfrac{1}{6}\cdot$
   Décidément, ce DL obtenu quasiment gratuitement grâce aux équivalents, quel bonheur...

— Il reste à montrer que ψ' est continue en 0, c'est-à-dire : $\psi'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \psi'(0)$. On va calculer $\psi'(x)$, le mettre sous même dénominateur (je sais : vous êtes super forts en quotients de développements limités, mais...), noter que le dénominateur à un équivalent très simple (à savoir x^4), et donc travailler à l'ordre 4 pour le numérateur :

$$\forall x \neq 0 \qquad \psi'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2 \sin^2 x}\cdot$$

On a évidemment $x^2 \cos x = x^2(1 - x^2/2 + o(x^2)) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$ ainsi que [1] :

$$\sin^2 x = \left(x(1 - x^2/6 + o(x^2))\right)^2 = x^2(1 - x^2/3 + o(x^2)) = x^2 - x^4/3 + o(x^4).$$

Ainsi $\sin^2 x - x^2 \cos x = (-1/3 + 1/2)\,x^4 + o(x^4) \sim x^4/6$ donc $\psi'(x) \sim_{x\to 0^+} 1/6$ et ainsi $\psi'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1/6 = \psi'(0)$, donc **$\psi'$ est continue en** 0.

Finalement, ψ **(prolongé) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** $[0, \pi/2]$**.**

3. Pour s'entraîner on pourra traiter les exemples supplémentaires suivants :
   (a) Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2}{1-\cos x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.
   (b) Montrer que l'application $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
   (c) Montrer que la fonction sinc est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (d) Montrer que le prolongement à $[0,\pi/2]$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Au fait :

1. Et là c'est peut-être moins évident pour ceux qui n'ont jamais appris à multiplier les DL en factorisant le terme principal...