Psi 999 – 2024/2025 ψ **Cours**

Suites et séries numériques

« Quand les types de 130 kg disent certaines choses, les types de 60 kg les écoutent. » – M. Audiard

Table des matières

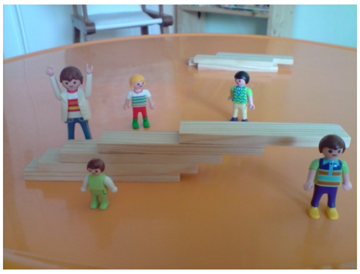

FIGURE 1 – $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Exercice 1. *Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Que vaut* $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ *? Et* $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ *? Et* $q + q^2 + \cdots + q^n$ *?*

Exercice 2. *Reprendre l'exercice précédent, mais en pensant à distinguer le cas $q = 1$ d'une part, et en donnant d'autre part le bon résultat lorsque $q \neq 1$.*

Exercice 3. *Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Que vaut* $\sum\limits_{k=5}^{n+8} q^k$ *?*

Exercice 4. *Reprendre l'exercice précédent en distinguant (...) le cas $q = 1$, et en s'interdisant d'utiliser une éventuelle formule mystérieuse qui parlerait de* $\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} q^k$ *ou du nombre de termes dans la somme...*

Fait : À partir de cette ligne, une méconnaissance des séries géométriques induira quelques ennuis.

1 Quelques préliminaires

Exercice 5. *Pour vous, que désignent ces différentes notations ? Comment les lisez-vous ?*

$$\sum u_n; \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n; \quad \sum_{k=0}^{n} u_k; \quad \sum_{k=0}^{n} u_n; \quad \sum_{N=0}^{n} u_N; \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

1.1 De quoi parle-t-on ?

Dans l'essentiel de ce chapitre, on donnera les définitions et résultats pour les séries réelles en évoquant rapidement les séries complexes.

Définition 1 — *Série de réels (définition que vous pouvez jeter à la poubelle)*

Une **série** de réels est une suite de la forme $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, où $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. On note cette série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou encore $\sum u_n$. Les s_n sont appelés **sommes partielles** de la série. Le **terme général** de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est u_n.

On définit bien entendu de la même façon une série de complexes, ou plus généralement d'habitants de E, avec E un espace vectoriel (normé s'il doit être question de convergence, mais les séries formelles ont également leur intérêt propre, en combinatoire/dénombrement).

Définition 2 — *Convergence, somme d'une série*

— La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est déclarée **convergente** lorsque la suite des sommes partielles converge, c'est-à-dire : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Cette limite ℓ est appelée la **somme de la série** et est notée $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

— En cas de convergence, on note en général $R_n := \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ le **reste de la série**. Il tend bien entendu (?) vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, l'écriture $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est toujours autorisée [1], alors que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne l'est que lorsque la série est convergente [2].

Fondamentalement : on se fiche de savoir ce qu'est une série (moi je le sais à peine par exemple). Par contre il est essentiel de savoir ce que signifie « telle série converge ».

1. Oui, on peut parler de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2$.

2. Non, on ne peut pas parler de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2$.

Exercice 6. *Montrer que si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est convergente, alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*. Montrer également que la réciproque est fausse.*

DÉFINITION 3 — *Grossièreté*

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ telle que u_n ne tend pas vers 0 sera dite **grossièrement divergente**.

Il faut bien comprendre que lorsque la condition **nécessaire** de convergence « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ » est bien respectée, il y a plusieurs comportements possibles pour la suite des sommes partielles :
— convergence ;
— divergence vers $+\infty$;
— divergence sans existence de limite.
Vous n'avez pas compris ce qui précède ? C'est probablement parce qu'à ce jour vous confondez « diverger » et « tendre vers $\pm\infty$ *». C'est arrivé à d'autres avant vous...*

Exercice 7. *Donner un exemple pour chacun de ces trois comportements.*

Le résultat suivant est essentiel : il ramène les études de convergence de suites à des convergences de séries (pour lesquelles nous auront des outils assez robustes).

PROPOSITION 1 — Suites vs séries

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si set seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ l'est.

PREUVE : Calculer d'abord les sommes partielles de la série en jeu, puis prouver tranquillement deux implications. ■

REMARQUE : De même que toute suite peut être vue comme une série, toute suite convergente peut être vue comme un reste.

Exercice 8. *Montrer que si* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, alors on peut écrire* $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1})$*.*

1.2 Les yeux fermés

Ces exercices de première année doivent pouvoir être faits de façon propre et efficace : dans un cas, il s'agit de sommer des suites géométriques ; dans l'autre, il s'agit de comparaisons somme/intégrale.

Exercice 9. *Montrer que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ *est convergente, et calculer sa somme.*

Exercice 10. *Montrer que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ *est convergente, alors que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est divergente.*

Les séries de Riemann seront développées plus tard dans le chapitre, mais retenons déjà ce qui se passe pour les séries géométriques.

THÉORÈME 1 — *Séries géométriques*

Soit $q \in \mathbb{C}$.
— Si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ diverge grossièrement.
— Si $|q| < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ est convergente, avec de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}\cdot$$

PREUVE : Le premier point est clair. On peut être ajouter que dans le cas où $|q| > 1$, on a un équivalent simple de la somme partielle : $\sum_{k=0}^{n} q^k \sim \frac{q^{n+1}}{q-1}\cdot$

Supposons maintenant : $|q| < 1$. Si $N \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}\cdot$ Par différence, on obtient bien la seconde relation. ■

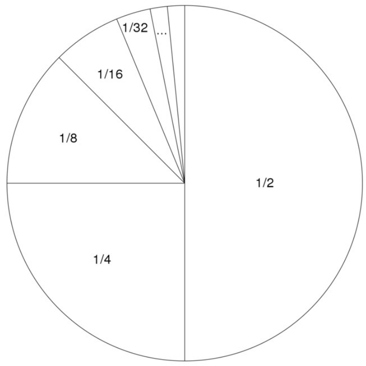

FIGURE 2 – $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$: le point de vue du pizzaïolo

1.3 Une série (...) de questions

— Comment déterminer si une série converge ?
— Comment calculer, le cas échéant, la somme de la série ?
— En cas de convergence, quelle est la vitesse de convergence [3] ?
— En cas de divergence vers $+\infty$, a-t-on un équivalent simple des sommes partielles ?

Il n'y a bien entendu pas de méthode qui permettrait d'étudier facilement n'importe quelle série, sans quoi, on aurait un procédé pour étudier la convergence de toute suite (« toute suite est une série »), ce qui est un objectif déraisonnablement ambitieux ! On verra cependant une collection de méthodes assez robustes, qui s'appliquent lorsque le terme général de la série possède un équivalent simple et/ou est de signe constant ou alterné. Les techniques de séries permettront même de revisiter des problèmes de convergence de suite.

2 Révisions sur les suites

2.1 Convergence des suites : avec et sans ε

DÉFINITION 4 — *Convergence des suites*

Une suite réelle u est déclarée **convergente vers** $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang *au delà duquel* on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On notera : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, de préférence à la notation ambigüe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

REMARQUES :

— Dans le cas d'une suite complexe, on écrit la même chose... en prononçant « module » plutôt que « valeur absolue » ! Pour un espace vectoriel, on a besoin d'une norme... et la convergence est en première approximation [4] liée à cette norme.
— On laisse au lecteur le soin de rappeler soigneusement la définition de la divergence vers $+\infty$. *Lequel lecteur aura préalablement rappelé la définition précise de « (u_n) est majorée », puis ce que signifie « (u_n) n'est pas majorée », notion bien entendu différente de « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ». Bien entendu...*

Exercice 11. *Donner un exemple de suite réelle non majorée, mais ne tendant pas vers $+\infty$. Donner également un exemple de suite tendant vers $+\infty$, mais qui n'est pas croissante (même au delà de n'importe quel rang).*

Rappelons quelques faits, qui parlent (sauf pour le premier) de CONVERGENCES, et non de la simple *valeur de limites* :

3. i.e. : a-t-on un équivalent simple du reste ?
4. En fait, la convergence est indépendante du choix de la norme, *en dimension finie.*

Propriétés :
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$ (« *unicité de la limite* »).
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha u_n + \beta v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$, avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 12. *Prouver ces différents résultats.*
On pourra dans un premier temps utiliser des encadrements du type $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$, mais on réécrira tout avec des valeurs absolues $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, pour avoir des preuves également valables sur $\mathbb{C}$. On montrera par ailleurs le lemme bien utile : « si (u_n) est bornée et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ».

J'allais oublier :
Fait : « Converger à partir d'un certain rang » est une notion grotesque.
Corollaire : Ceux qui vont continuer d'en parler se feront massacrer.

Le paragraphe suivant est spécifique à $\mathbb{R}$: il y est question d'ordre.

2.2 Limites et ordre

Un moyen important pour **localiser** une limite consiste à « passer à la limite » des inégalités **pour lesquelles on sait auparavant que les deux membres de l'inégalité convergent**.

Théorème 2 — *Passage d'inégalités à la limite*

> Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang) avec de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Exercice 13. *Montrez moi ça !*

Remarques :
- Attention, les inégalités strictes « peuvent être passées à la limite »... mais elles deviennent alors larges : si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\ell \geqslant 0$.
- Le « théorème-de-passage-des-inégalités-à-la-limite-mais-seulement-le-membre-de-droite-parce-que-celui-de-gauche-ça-nous-arrange-pas »... n'existe pas, en fait. On évitera donc de passer l'inégalité $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ à la limite (mais seulement à droite parce que etc...) pour en déduire $u_n \leqslant 1$. On sera par contre capable d'obtenir de façon convaincante la même conclusion sous l'hypothèse $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \cdots$

Fait : Si on passe une inégalité à la limite pour obtenir la convergence de l'un des deux membres, alors on se fait massacrer en spé comme en sup.

2.3 Théorèmes de convergence

Les deux résultats centraux à connaître sont les suivants :

Théorème 3 — *d'encadrement, ou des gendarmes*

> Si u, v et w sont trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (le même !), alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque : Le « théorème du gendarme » nous dit que si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème 4 — *Suites monotones*

> Soit u est une suite réelle croissante :
> - si elle est majorée, alors elle converge ;
> - si elle n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
>
> (elle possède donc toujours une limite).

Remarque : La preuve de ce résultat est très différente de celle du précédent : dans le cas majoré, il s'agit de prouver *l'existence* d'une limite... qui ne nous est pas fournie. Il convient donc de « deviner » quelle sera cette limite. La borne supérieure des termes de la suite est probablement un bon candidat.

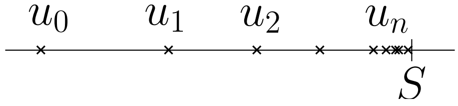

Figure 3 – Convergence des suites croissantes majorées

Signalons un dernier résultat au programme (absurde, de mon point de vue [5], mais bon...).

Théorème 5 — *Suites adjacentes*

Soient u et v deux suites réelles telles que :

1. u est croissante, et v décroissante ;
2. $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors u et v sont convergentes, de même limite.

Preuve : Dès qu'on aura les convergences, prouver que les limites sont égales sera simple. En fait, le gros de la preuve consiste à prouver ce qui peut pourtant sembler évident (mais qu'on met parfois par erreur dans les hypothèses) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Pour cela, on peut fixer N. La décroissance de la suite $(v_n - u_n)_{n\geqslant N}$ fournit : $v_n - u_n \leqslant v_N - u_N$ pour tout $n \geqslant N$. En passant cette inégalité à la limite (qui existe) en n, on obtient $v_N - u_N \geqslant 0$, donc $u_N \leqslant v_N$.
Maintenant, la suite u est croissante majorée par v_0 (écrire $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$), donc convergente. La fin est laissée au lecteur. ■

L'exercice qui suit est presque faisable en terminale. Il suffit de faire un dessin où on voit ℓ et 1, formaliser le « à partir d'un certain rang », puis être capable de tirer des informations de $\alpha_{N_0+1} \leqslant K\alpha_{N_0}$ et $\alpha_{N_0+2} \leqslant K\alpha_{N_0+1}$ donc $\alpha_{N_0+2} \leqslant K^2\alpha_{N_0}$, « etc »...

Exercice 14 (D'Alembert – V1)**.** *Soit u une suite à valeurs non nulles, telle que* $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le résultat qui suit n'est pas au programme, mais constitue un bon exercice : il nécessite une manipulation **élémentaire et propre** des ε. Il est vivement conseillé de commencer par le cas $\ell = 0$.

Exercice 15 (Cesàro)**.** *Soit u une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On a alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

À partir de maintenant, on peut se passer des ε dans la quasi totalité des exercices sur les suites.

2.4 Relations de comparaison, développements limités

Cet exercice doit être fait les yeux fermés :

Exercice 16. *Montrer que* $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ *possède une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.*

Fait : Tout le monde a un jour fauté, en pensées ou en actes, sur l'exercice précédent. On passe l'éponge, mais maintenant, on ne rigole plus avec ça [6].

5. Sauf pour les exercices dont l'objectif principal est de faire appliquer ce théorème !
6. C'est une blague. En fait on va encore en rire pendant quelques jours. C'est à partir de la fin septembre que les sourires vont progressivement disparaître...

Définition 5 — *Relations de comparaisons de suites*

Soient u et v deux suites réelles (avec v ne s'annulant pas au delà d'un certain rang). On dit que

- — u est **négligeable** devant v, et on note $u_n = o(v_n)$, ou $u_n \ll v_n$, lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- — u est **équivalente à** v, et on note $u_n \sim v_n$, lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- — u est **dominée par** v, et on note $u_n = O(v_n)$, lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque : On pourra préférer (selon le contexte) le point de vue : « il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ avec $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (respectivement ...) » pour exprimer l'équivalence (respectivement...) de deux suites. Formellement, il permet d'ailleurs de traiter le cas où les suites s'annulent au voisinage de $+\infty$...

On ira visiter son cours de première année pour toutes les propriétés standards de ces relations. On gardera en particulier en tête les plus importantes :

Fait : Sommer les équivalents, c'est très mal. En prendre les exponentielles, ce n'est guère mieux.

En cas d'envie pressante de sommer des équivalents, on passera par des développements limités...

Exercice 17. *Montrer que si* $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ *et* $v_n \sim \dfrac{2}{n}$*, alors* $u_n + v_n \sim \dfrac{3}{n}\cdot$

Il y a bien entendu beaucoup d'autres énormités qu'il serait dommage de ne pas régulièrement proférer...

Exercice 18. *Au sujet des équivalents... EXERCICE IMPORTANT*

- — *Prouver qu'au voisinage de 0,* $e^x \sim 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \sim 1 - x + \dfrac{x^3}{6}\cdot$
- — *Constater que les deux équivalents sont grotesques.*
- — *Promettre de ne jamais l'écrire...*

Il est essentiel d'avoir en tête dès le réveil les relations entre les fonctions usuelles, que ce soit au voisinage de 0 comme de $+\infty$.

Exemples :

- — Lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\sqrt{\ln t} \ll \ln t \ll (\ln t)^{100} \ll t^{0,001} \ll \sqrt{t} \ll t \ll t^2 \ll t^{100} \ll (1,001)^t \ll 2^t.$$

- — Lorsque t tend vers 0^+ :

$$t^2 \ll t \ll t^{0,0001} \ll \frac{1}{(\ln t)^{100}} \ll \frac{1}{\ln t}\cdot$$

Bref, **en cas de combat** [7] (« forme indéterminée »), ce sont les exponentielles de t qui l'emportent [8] sur les puissances de t qui l'emportent sur les puissances des logarithmes de t.

Les développements limités usuels, et les grands principes pour les mettre en œuvre... seront consultés dans le cours de sup. Attention, ils vont être pratiqués à assez haute dose cette année en général ; dans ce chapitre en particulier.

Pour travailler au voisinage $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on se ramènera systématiquement à 0 en écrivant la variable $a + u$, avec u petit.

Fait : Il n'existe que 0 et $+\infty$. À la rigueur, $-\infty$.

Exemple : On s'intéresse à $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$. On note tout d'abord que $u_n = \exp(n \ln v_n)$, avec v_n tendant vers 1. On va donc chercher un développement limité de la forme $v_n = 1 + \dfrac{K}{n} + o(1/n)$. On doit donc préciser le comportement de cos en $\dfrac{\pi}{3}$ et sin en $\dfrac{\pi}{6}$. Taylor-Young (ou tout simplement la définition de la dérivée) nous donne $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + u\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}u + o(u)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + u\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}u + o(u)$. Par ailleurs,

$$\frac{n\pi}{3n+1} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3n}} = \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{3}{n} + o(1/n)\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o(1/n),$$

7. Toujours commencer par regarder si les différents termes ne sont pas d'accord, bien entendu !
8. Au sens : « tendent plus rapidement vers 0 ou $+\infty$ ».

et de même : $\dfrac{n\pi}{6n+1} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{36n} + o(1/n)$, donc en composant les développements limités :

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18n} + o(1/n), \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{72n} + o(1/n),$$

donc

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = 1 + \pi\sqrt{3}\underbrace{\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{72}\right)}_{1/24}\frac{1}{n} + o(1/n).$$

On a alors $\ln v_n \sim \dfrac{\pi\sqrt{3}}{24n}$ puis $n\ln(v_n) \sim \dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}$ (équivalent qu'on évitera de passer à l'exponentielle...) puis $n\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}$, donc par *continuité* de la fonction exponentielle :

$$\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n = \exp(n\ln v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{3}/24}.$$

Exercice 19 (CCP)**.**

1. *Soient deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $u_n \sim v_n$. *Montrer qu'à partir d'un certain rang, les deux suites ont même signe.*
2. *Quel est le signe de* $\sinh\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$ *pour* n *assez grand ?*

Terminons par trois exemples complètement rédigés : une limite, un développement limité « brut », et un problème d'asymptote.
Lire les solutions sans avoir fait les calculs avant ne fera que vous convaincre que ce n'est pas trop compliqué... ce qui n'a pas de sens si on n'a pas fait lesdits calculs...
Exemples :

— Montrer que $\dfrac{\sin u - \ln(1+u)}{\mathrm{e}^u - \cos u}$ possède une limite lorsque u tend vers 0.
Numérateur et dénominateur tendent vers 0; on va donc chercher un équivalent de l'un et de l'autre. Puisqu'il s'agit de différences, on va passer par des développements limités.
ATTENTION : l'exercice est presque terminé. La réflexion/phrase précédente est la pierre angulaire du calcul.
Faisons semblant de nous faire avoir, en commençant à l'ordre 1.

$$\sin u - \ln(1+u) = (u + o(u)) - (u + o(u)) = o(u),$$

et ceci ne nous donne pas d'équivalent. *Avons-nous perdu beaucoup de temps ?*
Reprenons à l'ordre 2 :

$$\sin u - \ln(1+u) = \left(u + o(u^2)\right) - \left(u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = \frac{u^2}{2} + o(u^2) \sim \frac{u^2}{2}.$$

Pour le dénominateur, à l'ordre 1 :

$$\mathrm{e}^u - \cos u = (1 + u + o(u)) - (1 + o(u)) = u + o(u) \sim u,$$

de sorte que :

$$\frac{\sin u - \ln(1+u)}{\mathrm{e}^u - \cos u} \sim \frac{\frac{u^2}{2}}{u} = \frac{u}{2},$$

et donc :

$$\boxed{\frac{\sin u - \ln(1+u)}{\mathrm{e}^u - \cos u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0.}$$

À retenir : commencer un ordre trop bas ne fait pas perdre beaucoup de temps (surtout au brouillon). Aller un ordre trop loin coûte toujours du temps, et souvent des erreurs. Conclusion ?

— Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

Le développement limité de $\ln(\cos x) = \ln(1 - x^2/2 + o(x^2)) \sim -x^2/2$ commence par un terme d'ordre 2 qui sera mis en facteur. Pour le dénominateur, on a donc seulement besoin d'aller à l'ordre 2. On va utiliser $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ avec $u \sim -\dfrac{x^2}{2}$ et $(1+v)^\alpha = 1 + \alpha v + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 + o(v^2)$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $v \sim x$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\frac{x^4}{4}}{2} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\left(1 + x + x^2\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(x + x^2\right) + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1+x+x^2}} &= -\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2}\left(1 + -\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)\right),
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1+x+x^2}} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{48} + o(x^4).}$$

— Montrer que le graphe de l'application

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x + 4}\,\ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$$

possède une asymptote au voisinage de $+\infty$. Donner les positions relatives.

On a directement $f(x) \sim \sqrt{x^6}\dfrac{2}{x^2} = 2x$, mais on souhaite (ET TOUT EST LÀ) obtenir un développement de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o(1/x)$ donc on calcule deux termes au delà de l'équivalent :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x + 4} &= x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o(1/x^2)\right)^{1/2} \\
&= x^3\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x^4} + o(1/x^4) = \frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right).$$

En multipliant ces développements limités, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right)\frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right) \\
&= 2x\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2)\right) \\
&= 2x + 1 - \frac{1}{4x} + o(1/x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) - (2x+1) \sim -\dfrac{1}{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$, et donc :

$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ a pour asymptote la droite d'équation } y = 2x+1\text{, et est situé dessous.}}$

Si on regarde « de trop loin » le graphe de f et son asymptote, on peut penser que le premier est situé dessus le premier... mais en fait non !

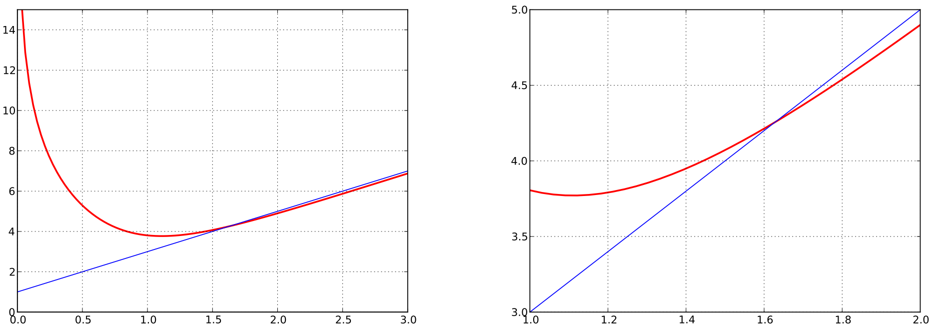

FIGURE 4 – Le graphe de f passe bien dessous son asymptote...

À retenir : pour multiplier des développements limités, on se ramène à $(1+\cdots)(1+\cdots)$. Si vous savez faire autrement de façon correcte et convaincante, continuez. Sinon, passez à ma méthode. Je ne le redirai pas cent fois.
Mais probablement une cinquantaine tout de même.

2.5 Relations de récurrence linéaires d'ordre 1 et 2

Les suites géométriques sont connues depuis quelques années... Ils s'agit de suites vérifiant une relation *linéaire*. Celles vérifiant la relation *affine* associée « $u_{n+1} = au_n + b$ » s'étudient de façon standard (dans la relation linéaire/affine) en cherchant un point fixe $\ell = a\ell + b$ (équation qui doit posséder une unique solution dès que $a \neq 1$...) puis en considérant la suite v définie par $v_n = u_n - \ell$: elle vérifie maintenant la relation $v_{n+1} = av_n$, ce qui nous permet d'avoir v_n puis u_n.
Quand une suite vérifie une relation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, on connaît également son expression. On rappelle ici seulement le résultat (cours de première année) : il est très naturel si on cherche des suites géométriques vérifiant la relation de récurrence.

THÉORÈME 6 — *Récurrences linéaires d'ordre 2*

Soit u une suite complexe vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$).
On considère alors l'équation caractéristique $\rho^2 = a\rho + b$ (C).
— Si (C) possède deux racines **distinctes** ρ_1 et ρ_2, alors il existe deux constantes $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = K_1\rho_1^n + K_2\rho_2^n$.
— Si (C) possède une racine double ρ_0, alors il existe deux constantes $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = K_1\rho_0^n + K_2 n\rho_0^n$.

REMARQUE : On évitera d'appliquer ce type de résultat pour des récurrences de la forme

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n + u_{n-1} \ldots$$

Exercice 20. *Prouver le résultat précédent (disons dans le cas des racines distinctes*[9]*). Énoncer ensuite un théorème traitant les récurrences linéaires d'ordre* 3*. Le prouver dans les cas de trois racines distinctes.*

EXEMPLE : La suite de Fibonacci vérifie les conditions initiales : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et la relation de récurrence $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'équation caractéristique $\rho^2 = \rho + 1$ possède pour racines

9. Il s'agit de résoudre une **infinité** d'équations avec **deux** inconnues K_1 et K_2. C'est a priori un peu difficile. On peut donc faire une analyse : si toutes les équations sont vérifiées, alors les deux premières le sont, ce qui impose la valeur de K_1 et K_2. Dans la synthèse, on fixe K_1 et K_2 ainsi. Les deux premières équations sont alors vérifiées, et la relation de récurrence nous assure que la troisième le sera, puis la quatrième : une petite récurrence double ou avec prédécesseurs permet de conclure.

$\varphi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, donc il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = K_1\varphi_1^n + K_2\varphi_2^n$. Grâce aux conditions initiales, on trouve finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1^n - \varphi_2^n\right).$$

2.6 Et pour finir...

On va maintenant s'intéresser aux suites u vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$ mais seulement un domaine D, on doit avoir $f(D) \subset D$ pour être certain que la relation définit bien une suite (u_n).
Il est essentiel de maîtriser un cas particulier favorable : lorsque f est croissante. On va se placer sous cette hypothèse, avec f définie et continue sur $\mathbb{R}$. Le schéma d'étude est TOUJOURS le même.
Fait : Ceux qui ne feront pas comme ça peuvent tout de suite déchirer leur copie : je ne corrigerai pas. Il est d'ailleurs conseillé de rédiger sur une copie indépendante, pour éviter les dégâts collatéraux...
Voici donc la procédure à suivre :

- on étudie (rapidement si possible) les variations de f et le signe de $f(x) - x$;
- on représente le graphe de f et les premiers termes de la suite, avec l'escalier habituel [10] ; on signale ce qu'on devine sur le comportement de la suite ;
- on prouve que tel intervalle est stable (seule la croissance de f et les éventuelles relation $f(x) = x$ interviennent [11]) ;
- on prouve que tous les termes de la suite sont dans tel intervalle (sur lequel $f(x) - x$ garde un signe constant...) : récurrence immédiate (mais on la rédige si on a peur que le correcteur ait des doutes, ce qui sera fatalement le cas quand le reste de la rédaction est « flottant »).
- on constate alors que u est monotone, en utilisant [12] la localisation de la suite et le signe de $f(x) - x$;
- on invoque un résultat qui va nous dire que u possède une limite ;
- ici, il y a deux possibilités (et grâce au dessin, on sait ce qu'on veut montrer !) :
  1. Pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on évite de lancer dès le début le très drôle mais finalement pas tant que ça [13] « la suite est croissante et non majorée donc tend vers $+\infty$ ». On prouve qu'une éventuelle limite finie vérifierait $f(\ell) = \ell$ (trois arguments doivent apparaître dans la preuve), et on localise la limite via le passage à la limite de $u_0 \leqslant u_n$ qui fournit $u_0 \leqslant \ell$, que l'on combine *ensuite seulement* avec $x_0 < u_0$ (avec x_0 le plus gros point fixe de f) pour obtenir $x_0 < \ell$, ce qui nous donne une absurdité, **et il reste à conclure**.
  2. Pour prouver une convergence vers un point fixe x_0, on note ℓ la limite [14] ; on prouve comme plus haut que $f(\ell) = \ell$: c'est gagné s'il y a un seul point fixe. S'il y en a plusieurs, on localise à nouveau la limite [15].
- on se relit parce qu'on sait que la moindre bêtise [16] sera détectée instantanément par le chacal qui vous corrige.

Exemple : Soit u définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $f = \sin$ a un comportement plutôt bien connu... et vérifie $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$ (résultat classique qu'on peut établir dès la classe de terminale avec une étude de fonction. Sur $[0, \pi/2]$, on la verra plutôt comme une inégalité de convexité, pour ceux à qui ça parle). Il y a même égalité si et seulement si $x = 0$.

---

10. En gardant le cerveau branché, pour ne pas le faire dans le mauvais sens.
11. Vous avez parlé de continuité ? poubelle. Vous avez expliqué que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$? poubelle.
12. Vous préférez une récurrence ? poubelle. Vous trouvez ça fasciste de ma part ? Oui, et donc ?
13. Les statistiques sont formelles : 100% du temps, le « non majorée » signifie quelque chose du genre « ben $1 \leqslant u_n$, donc u_n n'est pas majorée ».
14. C'est l'un des moments de la preuve ou vous avez un petit degré de liberté : la limite peut être notée autrement.
15. Et NON, les « ben la suite est entre x_1 et x_2 et décroît, donc $\ell = x_1$ » ne sont pas acceptés : considérer plutôt l'inégalité $x_1 \leqslant u_n \leqslant u_0$ et la passer à la limite...
16. Et on en raconte entre 5 et 10 la première fois ; c'est un théorème important sur les suites à bien avoir en tête.

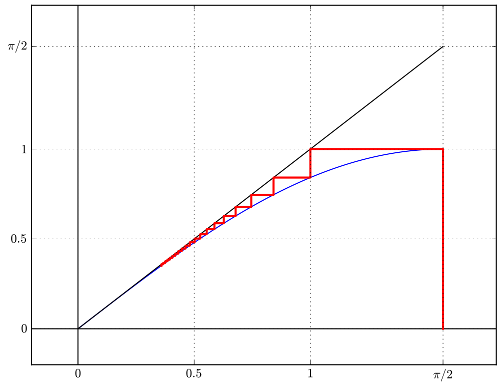

Figure 5 – L'escalier usuel

On va prouver ce qu'on voit sur le dessin : u est décroissante et tend vers 0.

1. *Étude de f :* puisque $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, il y a peu d'intervalles stables. Mais $I = [0, \pi/2]$ est tout de même stable : si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, la *croissance* de f sur cet intervalle montre :
$$0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\pi/2) = 1 \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$$
2. *Localisation de la suite :* on définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in I$ ».
   — On a $u_0 = \dfrac{\pi}{2} \in I$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
   — Supposons maintenant $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ **fixé**. On a alors $u_n \in I$; or I est stable par f, donc $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \in I$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

   La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. *Monotonie, convergence :* pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant x$. Or les u_n sont dans I, donc vérifient $f(u_n) \leqslant u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite u est donc décroissante et minorée par 0 (d'après la localisation dans I), donc converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
4. *Localisation puis valeur de la limite :* d'une part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite) et d'autre part $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité de f en ℓ. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, l'unicité de la limite nous assure que $f(\ell) = \ell$. Mais sur $\mathbb{R}$, 0 est la **seule** solution de cette équation (inégalités strictes $f(x) < x$ (resp. $f(x) > x$) pour $x > 0$ (resp. $x < 0$)), et donc :
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Remarques :
- Dans la dernière phase, on n'a PAS utilisé le fait que $f(0) = 0$ mais plutôt le fait que pour $x \neq 0$, on a $f(x) \neq x$; ce qui est très différent !
- Au sujet des récurrences :
  - Non, je ne pars pas du principe que vous savez les rédiger : c'est à vous de m'en convaincre.
  - AUCUNE récurrence ne peut se faire sans que l'on précise soigneusement ce qu'est la propriété au rang n, p ou autre chose. Les guillemets autour de ce qu'est précisément $\mathcal{P}(n)$ sont même indispensables. Avec le métier, vous comprendrez pourquoi. En attendant, vous le faites, épicétout.
  - Quand vous saurez enfin rédiger les récurrences d'une façon que je juge satisfaisante, vous constaterez qu'écrire les choses soigneusement n'est pas beaucoup plus long que de faire n'importe quoi...

Exemple : On suppose maintenant : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{e^x}{10}\cdot$ Les variations de f sont sans mystère. Pour le signe de $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, on note que φ est continue, strictement décroissante sur $]-\infty, \ln 10]$, et $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc φ induit une bijection de $]-\infty, \ln 10]$ sur $[\varphi(\ln 10), +\infty[$. Mais $\varphi(\ln 10) < 0$, donc il existe un unique $x_1 < \ln 10$ tel que $\varphi(x_1) = 0$, soit encore $f(x_1) = x_1$. Le même travail à droite de $\ln 10$ nous assure l'existence d'un unique $x_2 > \ln 10$ tel que $f(x_2) = x_2$. Les variations de φ permettent de terminer l'étude du signe de φ, et donc de la position du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

x		x_1		x_2	
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	0	$+$

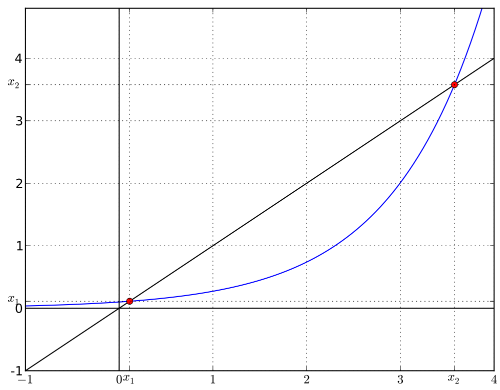

Figure 6 – $x_1 \simeq 0,112$ et $x_2 \simeq 3,577$

On voit que trois intervalles vont intervenir : $I_1 =]-\infty, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$, et $I_3 = [x_2, +\infty[$. La croissance de f *(et non sa continuité)* nous assure que ces trois intervalles sont stables par f. Par exemple, si $x \in I_2$, alors $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, donc $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, mais $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, donc $f(x) \in I_2$. Pour I_3, il suffit de noter que si $x_2 \leqslant x$, alors $x_2 = f(x_2) \leqslant f(x)$ (et il n'est pas question d'être plus petit que $+\infty$...)

1. Si $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, alors $u_1 = f(u_0) = u_0$, puis par récurrence immédiate : $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est stationnaire (donc converge !).
2. Si $u_0 \in I_1$, la stabilité de I_1 par f nous assure via une récurrence immédiate que tous les u_n sont dans I_1. Sur cet intervalle, $f(x) \geqslant x$, donc on a toujours $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante, majorée par x_1, donc admet une limite ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$ (trois arguments usuels...), c'est-à-dire $\varphi(\ell) = 0$, donc $\ell = x_1$ ou x_2. L'inégalité $u_n \leqslant x_1$ passée à la limite nous assure $\ell \leqslant x_1$, puis $\ell = x_1$.
3. Supposons $u_0 \in]x_1, x_2[\subset I_2$: I_2 est f-stable, donc tous les u_n sont dans I_2 par récurrence immédiate. Sur cet intervalle, $f(x) \leqslant x$, donc u est décroissante, minorée par x_1, donc admet une limite ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\varphi(\ell) = 0$, donc $\ell = x_1$ ou x_2. L'inégalité $u_n \leqslant u_0$ passée à la limite nous assure $\ell \leqslant u_0$ donc $\ell < x_2$, puis $\ell = x_1$.
4. Si $u_0 > x_2$, alors $u_0 \in I_3$; une récurrence immédiate nous assure que tous les u_n sont dans I_3. Sur cet intervalle, $f(x) \geqslant x$, donc u est croissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ vérifierait $f(\ell) = \ell$. Mais l'inégalité $u_n \geqslant u_0$ passée à la limite fournit $\ell \geqslant u_0 > x_2 > x_1$, donc ℓ ne peut être point fixe de f, ce qui est absurde. Ainsi, u **est croissante et non convergente, donc tend vers** $+\infty$.

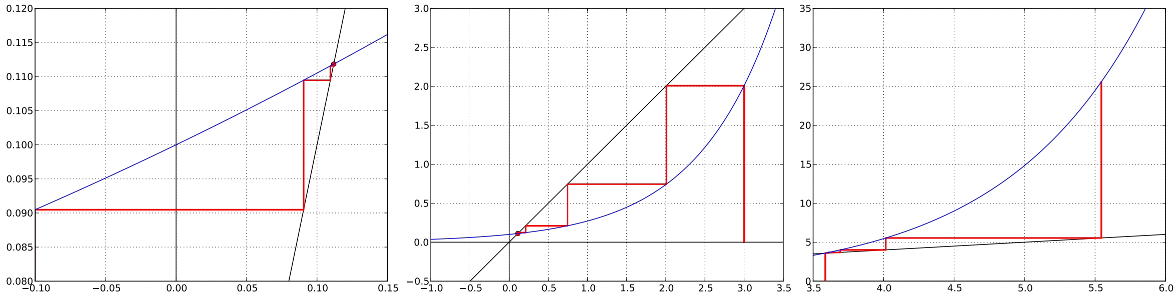

Figure 7 – Les trois comportements possibles ($u_0 = 3,586$ dans le dernier cas)

Remarque : Je ne connais pas de théorème qui dise « si les u_n sont dans I et convergent vers ℓ, alors $\ell \in I$ ». Et vous ?

3 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on traite des séries positives. Bien entendu, tous les résultats se traduisent facilement dans le cas de séries négatives. Le point crucial est que la positivité des u_n nous assure la croissance de la suite des sommes partielles, donc la suite de ces sommes partielles admet une limite : finie, ou $+\infty$. On s'autorise d'ailleurs parfois la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. C'est à la fois bien pratique (quand on comprend précisément ce qu'on raconte [17])… et dangereux chez des gens qui confondent presque systématiquement « diverger » et « tendre vers $+\infty$ » (spoiler : c'est votre cas !).
La plupart du temps, on aura u_n équivalent à (ou dominé par) quelque chose de simple (géométrique, ou de la forme $\dfrac{K}{n^\alpha}$). Il convient donc de bien connaître le comportement des séries géométriques (ce qui n'est pas trop compliqué…) et celui des séries dont le terme général est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ (séries de Riemann) : un théorème nous permettra de relier le comportement des séries de termes généraux équivalents ou dominés l'un par l'autre.

Exercice 21. *Montrer que si* $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge, alors* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *aussi.*

3.1 Séries de Riemann

Théorème 7 — *Séries de Riemann*

Soit $\alpha > 0$.
- Si $\alpha > 1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.
- Si $\alpha = 1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ (série harmonique) diverge, avec de plus $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} \sim \ln N$.
- Si $\alpha < 1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge, avec de plus $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^\alpha} \sim \dfrac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot$

Preuve : Comparaisons somme/intégrale. Vous verrez d'autres preuves, probablement plus courtes, mais *vraiment*, le point de vue comparaison somme/intégrale DOIT être compris, DANS LES DÉTAILS. ■

Le résultat suivant est laissé en exercice, mais est vraiment à la frontière du cours et nécessite du soin…

Exercice 22. *Soit* $\alpha > 1$. *À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, donner un équivalent du reste de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}\cdot$

3.2 Les théorèmes de comparaison

Ils nous disent que **dans le cas des séries à signe constant**, deux séries équivalentes ont le même comportement.

Théorème 8 — *Séries de termes équivalents*

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont deux séries à termes positifs, avec $u_n \sim v_n$, alors les deux séries convergent, ou bien les deux séries divergent.

Preuve : On suppose d'abord $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente. Le rapport $\dfrac{v_n}{u_n}$ tend vers 1, donc est majoré par 2 pour n assez grand, disons $n \geqslant N_0$. Pour de tels n, on a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{N_0-1} v_k}_{=K} + \sum_{k=N_0}^{n} v_k \leqslant K + 2\sum_{k=N_0}^{n} u_k \leqslant K + 2\sum_{k=N_0}^{\infty} u_k.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée [18], donc convergente.

17. Ce qui n'est a priori pas encore votre cas !
18. Et on a bien pris soin de majorer par une constante, comme toujours…

Par symétrie, on a bien $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente. ■

EXEMPLE : La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sin\dfrac{1}{2^n}$ converge, alors que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

REMARQUE : Attention : si on prend $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors $u_n \sim v_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge (on le verra dans la partie 4) alors que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge (somme d'une convergente et d'une divergente d'après Riemann).

Exercice 23. *(St Cyr)*
Donner la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot$

Les séries **de réels positifs** ont le comportement qu'on peut raisonnablement espérer vis-à-vis des autres relations de comparaison...

THÉORÈME 9 — *Diverses comparaisons de séries*

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries **à termes positifs**.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

PREUVE : Les deux derniers énoncés... sont conséquences du premier ! Supposons donc $u_n = O(v_n)$, avec $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente. Il existe alors $A > 0$ et N_0 tels que pour tout $k \geqslant N_0$, $u_k \leqslant A v_k$. On obtient alors comme plus haut pour $n \geqslant N_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k}_{=K} + \sum_{k=N_0}^{n} u_k \leqslant K + A\sum_{k=N_0}^{n} v_k \leqslant K + A\sum_{k=N_0}^{\infty} v_k,$$

et on conclut à nouveau comme plus haut ! ■

EXEMPLE : Nature de la série $\sum\limits_{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$? (Mines)
Moralement, l'exponentielle va rendre le terme négligeable devant beaucoup de choses. Par exemple : $n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est clair ?) donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$, donc $\sum\limits_{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

REMARQUE : On a $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, avec $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ qui diverge et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui converge : il faut vraiment faire attention au signe...

Exercice 24. *Pour quels triplets* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *la série* $\sum\limits_{n} \left(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}\right)$ *est-elle convergente ?*

Exercice 25. *Montrer que* $\sum \dfrac{(\ln n)^{12}}{n^2}$ *est convergente alors que* $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{12}}$ *est divergente.*

REMARQUE : Si $\sum u_n$ est à termes positifs et qu'on trouve $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\sum u_n$ converge (ça restera vrai sans la condition de positivité des u_n et a contrario si on trouve $\alpha < 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\sum u_n$ est divergente. Pour étudier en première approximation la convergence d'une série, on peut donc essayer de discuter du comportement de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de α, ce qui permet parfois de conclure.
Il est essentiel de comprendre que $n^\alpha u_n$ n'a de sens que parce que c'est $\dfrac{u_n}{1/n^\alpha}\cdot$ Plutôt que d'apprendre un résultat magique supplémentaire, revenez comme moi à la comparaison à $\dfrac{1}{n^\alpha}$ en faisant apparaître le quotient... sous la forme d'un quotient !

3.3 Comparaisons somme/intégrale

On a déjà vu (séries de Riemann) le bénéfice qu'on pouvait tirer d'une comparaison somme/intégrale. Il n'y a aucun résultat particulier à ce sujet à connaître, mais il faut être capable de rédiger de façon

correcte et efficace ce type de comparaisons.
Un théorème[19] prétend vous simplifier la tâche...

THÉORÈME 10 — *Comparaison séries/intégrales*

Si f est une fonction continue (par morceaux) à valeurs réelles positives **et décroissante**, alors il y a équivalence entre :

— $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge ;

— « f est *intégrable* sur $[0,+\infty[$ », ou encore « $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente » – c'est-à-dire : $\int_0^X f(t)dt$ possède une limite **finie** lorsque X tend vers $+\infty$.

PREUVE : Left to the reader. ■

On commencera systématiquement par faire un dessin sur lequel on voit les quantités qui vont être comparées : typiquement, deux rectangles d'aire $f(k)$ (et pas $f(k-1)$ ou $f(k+1)$...), et deux intégrales (si on veut encadrer les sommes partielles ou restes).

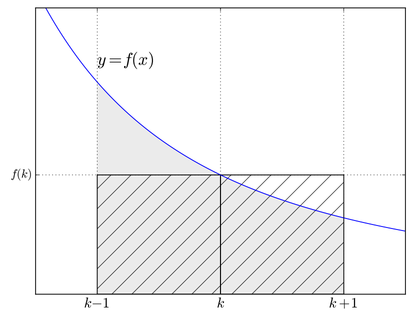

FIGURE 8 – TOUJOURS faire ce dessin

Si on veut seulement majorer (resp. minorer $f(k)$), on ne représente qu'un seul rectangle et une seule zone sous la courbe.

On peut préférer plutôt encadrer $\int_k^{k+1} f(t)dt$ *puis sommer. On conserve deux rectangles, et il faudra du soin aux bords, mais ça me convient aussi !*

Exercice 26. *Pour quelles valeur de* α *la série* $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ *est-elle convergente ?*

3.4 Constante d'Euler

Exercice 27. *Avec une comparaison somme/intégrale, montrer :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

SOLUTION : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$ Une comparaison somme/intégrale fournit :

$$1+\int_2^n \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}\cdot$$

Le membre de gauche vaut $\ln n + 1 - \ln 2$, et celui de droite : $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+1/n) \sim \ln n$, donc (tout diviser par $\ln n$ puis gendarmiser) on a bien $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exercice 28. *Montrer :* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma \in \mathbb{R}$ *(*γ*, qu'on ne cherchera pas à « calculer », s'appelle la* constante d'Euler*).*

19. Absurde de mon point de vue.

Solution : Pour évaluer la différence $\delta_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$, on peut voir δ_n comme une somme de série :

$$\delta_n = \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} (\delta_k - \delta_{k-1}) .$$

Puisque $\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{1}{k} + \ln(1 - 1/k) \sim -\frac{1}{2k^2}$,

$$\boxed{\text{la série } \sum (\delta_n - \delta_{n-1}) \text{ est convergente, donc } (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente.}}$$

On vient donc d'établir le résultat suivant, qui est à connaître !

Théorème 11 — *Développement asymptotique de la série harmonique*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

3.5 Autour de Stirling

On va s'intéresser ici au résultat suivant (au programme, mais pas sa démonstration) :

Théorème 12 — *Formule de Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n .$$

Deux points de vue permettent d'obtenir la tête de l'équivalent (sans la constante $\sqrt{2\pi}$).

1. On peut montrer directement que $\alpha_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ possède une limite finie : la tête de l'équivalent sort du chapeau, mais c'est rapide ! Montrer la convergence de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalent [20] à montrer la convergence de la *suite* $(\ln \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui est équivalent à montrer la convergence de la *série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n)$. On fait donc un petit calcul, et on obtient :

$$\ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n = O(1/n^2),$$

   et on doit pouvoir conclure.
2. Pour comprendre la tête de l'équivalent dans la formule de Stirling, on peut essayer d'obtenir un développement asymptotique de $\ln(n!)$ de la forme $\ln(n!) = \cdots + o(1)$ (on a en tête de prendre ensuite l'exponentielle pour obtenir un équivalent, donc le développement asymptotique doit être poussé jusqu'à l'ordre $o(1)$). Pour cela, une comparaison somme/intégrale permet de coincer facilement $\ln(n!)$ entre deux termes de la forme $n \ln n - n + O(1)$. Il est alors raisonnable de s'intéresser à $\delta_n = \ln(n!) - (n \ln n - n)$.
   Un développement limité nous fournit : $\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{1}{2n} + O(1/n^2)$. Si on connaît/admet le théorème de sommation des équivalents (pour des sommes partielles de séries divergentes à termes de signe constant), on obtient alors $\delta_n \sim \frac{1}{2} \ln n$, et il est alors naturel de s'intéresser à

$$\gamma_n = \delta_n - \frac{1}{2} \ln n = \ln(n!) - \left(n \ln n - n - \frac{1}{2} \ln n\right) .$$

   On a cette fois $\gamma_{n+1} - \gamma_n = O(1/n^2)$: la fin est laissée au lecteur !

Pour trouver la constante $K = \sqrt{2\pi}$, une façon classique consiste à passer par les intégrales de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt.$$

20. Pas tout à fait, mais ici, on a la bonne implication !

1. On commence par montrer que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$: prouver $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ et tout diviser par W_n ; deux intégrations par parties fournissant une relation entre W_n et W_{n+2}, on obtient après gendarmisation $W_{n+1} \sim W_n$. Mais cette même relation d'ordre 2 nous dit que $(n+1)W_nW_{n+1}$ est constante, donc égale à $W_1W_0 = \pi/2$, puis $nW_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$, et c'est gagné.
2. D'autre part, en utilisant la formule reliant W_n et W_{n+2}, on a une formule permettant d'expliciter W_{2n} à l'aide de $(2n)!$ et $n!$ En injectant l'équivalent $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ dans l'équivalent de W_n, on obtient la valeur de K.

3.6 Règle de d'Alembert

Il arrive que u_n n'ait pas d'équivalent simple. On peut alors s'intéresser au rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (pour peu que $u_n \neq 0$!). Si on pense aux suites géométriques, on imagine bien que c'est la position de ce rapport vis-à-vis de 1 qui va arbitrer.

Théorème 13 — *Règle de d'Alembert pour les séries – V2*

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série de réels strictement positifs tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors :
- si $\ell < 1$ alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ;
- si $\ell > 1$ alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Preuve : Placer r (strictement) entre 1 et ℓ. Pour n assez grand, on aura $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ entre ℓ et r. Si $\ell < 1$, cela permet de majorer u_n (à partir d'un certain rang) par une suite géométrique de raison $r < 1$ puis de majorer les sommes partielles de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ par une série convergente. Dans le cas où $\ell > 1$, on peut minorer u_n à partir d'un certain rang par une suite géométrique de raison $r > 1$. ■

Exemples :
- Pour $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$ converge.
- Pour $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^n}{n!}$, on a cette fois $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \cdots = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} > 1$, donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^n}{n!}$ diverge grossièrement.

Remarques :
- On verra plus tard une version « non signée » : sous l'hypothèse $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$, on aura la convergence absolue (donc convergence tout court) de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ ou $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc le cas $\ell = 1$ est indéterminé (et hélas fréquent, surtout dans les exos taupinaux !).

4 Séries alternées (presque à la marge)

Définition 6 — *Séries alternées*

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite **alternée** lorsque $(-1)^n u_n$ a un signe indépendant de n.

Concrètement, il s'agit de séries de la forme $\sum(-1)^n v_n$ ou $\sum(-1)^n v_{n+1}$ avec tous les v_n positifs.
L'exercice qui suit, « assez proche du cours » concerne les deux résultats à connaître sur le sujet…

Exercice 29. *(CCP)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante et de limite nulle.
1. *Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge.*
2. *Montrer que $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant |u_n|$.*

4.1 Observons la somme

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. On ajoute ici l'hypothèse : « la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ». On a alors $s_1 = u_0 + u_1 \leqslant u_0 = s_0$, et de façon tout aussi claire : $s_2 = s_1 + u_2 \geqslant s_1$. Plus finement : $s_2 - s_0 = u_2 + u_1 = |u_2| - |u_1| \leqslant 0$, donc $s_2 \leqslant s_0$.

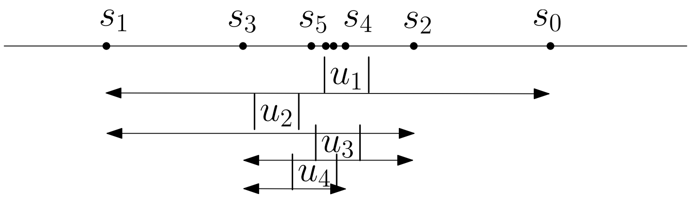

FIGURE 9 – Deux pas en avant, un pas en arrière, un demi-pas en avant...

On montre de la même façon que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{2n} \leqslant s_{2n-2}$ et $s_{2n+1} \leqslant s_{2n+3}$. Finalement :

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots \leqslant s_2 \leqslant s_0.$$

4.2 Convergence de certaines séries alternées

Le résultat suivant est parfois appelé « règle de Leibniz ».

THÉORÈME 14 — *Théorème Spécial sur les Séries Alternées,* aka *« TSSA »*

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série alternée telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante** et tend vers 0, alors cette série converge.

PREUVE : Comme on l'a vu plus haut, les suites extraites des sommes partielles $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (décroissante/croissante, avec une différence tendant vers 0), donc convergentes vers une limite commune. On sait alors que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune à $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. ■

REMARQUES :

— Le lemme utilisé (« si $\alpha_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ») se démontre facilement : on fixe $\varepsilon > 0$. Pour p assez grand, disons $p \geqslant P_0$, on a $|\alpha_{2p} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $|\alpha_{2p+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a alors pour tout $n \geqslant 2P_0$: $|\alpha_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (distinguer selon la parité de n).

— On peut survivre sans le théorème sur les suites adjacentes, si on est capable de le redémontrer à chaque fois. Ici, on a $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par s_0 (fixer n : on a alors $s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant s_0$ par décroissance de $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$...) donc convergente vers disons ℓ_1. Même chose pour $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge donc vers ℓ_2. Puisque $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$, on obtient bien $\ell_1 = \ell_2$...

— Attention, la condition de décroissance de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est souvent oubliée : il faut bien penser aux TROIS hypothèses.

EXEMPLE : La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente. Il en va de même pour toutes les séries de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, dès que $\alpha > 0$: ces séries ne sont pourtant pas « absolument convergentes » (la série des valeurs absolues diverge) quand $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 30. *En utilisant le développement asymptotique de la série harmonique, montrer :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Exercice 31. *Exhiber une série alternée* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *telle que* $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *mais qui ne converge pas.*

4.3 Contrôle du reste d'une série alternée

On a une première information assez forte sur le reste d'une série alternée *vérifiant les hypothèses du théorème spécial sur les séries alternées* :

Théorème 15 — *Reste d'une série alternée*

> Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée telle que $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant. Le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est alors du signe de u_{n+1}, et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Preuve : Supposons par exemple u_n positif. On a alors $u_{n+1}+u_{n+2} \leqslant 0$ (par décroissance de $|u_n|$), et de même $u_{n+2p+1}+u_{n+2p+2} \leqslant 0$, donc $\sum\limits_{k=n+1}^{n+2p+2} u_k \leqslant 0$, puis $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant 0$ par passage d'inégalité à la limite : R_n est bien du signe de u_{n+1}.
Par ailleurs, $R_n = u_{n+1} + R_{n+1}$, et $R_{n+1} \geqslant 0$, donc : $u_{n+1} \leqslant R_n \leqslant 0$. On obtiendrait bien entendu, dans le cas où u_n est négatif : $0 \leqslant R_n \leqslant u_{n+1}$, ce qui prouve bien les résultats annoncés. ■

Remarque : Disons-le, répétons-le : le fait d'être alternée et convergente, pour une série, n'est pas suffisant pour obtenir les conclusions précédentes : ce théorème réclame la vérification (ou le rappel) de TROIS hypothèses.

Si on veut des informations plus précises sur le reste, on peut regrouper les termes par deux : par décroissance de $|u_n|$, on obtient alors une série de termes à signes constants. Pour peu qu'on ait un équivalent de ces regroupements par deux...
Exemple : Pour la série harmonique : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est du signe de $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ et est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{n+1}$.

5 Séries générales

5.1 Séries absolument convergentes

La définition qui suit s'applique aux séries de réels ou de complexes. En remplaçant les valeurs absolues par des normes, elle garde du sens dans les espaces vectoriels normés.

Définition 7 — *Convergence absolue*

> Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite *absolument convergente* lorsque la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.

On a déjà vu des séries qui convergent sans être absolument convergente : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ par exemple.
Réciproquement, dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou les espaces vectoriels normés de dimension finie, la convergence absolue entraîne bien la convergence... ce qui est d'ailleurs bien pratique pour établir rapidement la convergence d'une série.

Théorème 16 — *(Absolue) convergence*

> Toute série de complexes absolument convergente est convergente.

Preuve : On commence par le cas réel : on peut écrire $u_n = v_n - w_n$, avec $v_n = u_n^+ = \mathrm{Max}(u_n, 0)$ et $w_n = u_n^- = \mathrm{Max}(-u_n, 0)$. On a alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ qui sont deux séries à termes positifs, et leurs sommes partielles sont majorées par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Ces séries convergent donc, et il en va alors de même pour $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
Passons maintenant au cas complexe : On écrit $u_n = x_n + iy_n$, avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. On a $\sum\limits_{n=0}^{N} |x_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} |u_n|$ (on n'a pas utilisé une mystérieuse 17-ème inégalité triangulaire, mais juste le fait que le module d'un complexe est plus grand que la valeur absolue de la partie réelle !). On a donc $\sum\limits_{n=0}^{N} |x_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est convergente, donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente, donc convergente. Le même raisonnement s'applique bien entendu à y_n, et permet de conclure. ■

Exemple : Si $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente : utiliser par exemple la règle de d'Alembert, ou bien l'exercice 14 avec $u_n = n^2 \frac{|z|^n}{n!}$.

Définition 8 — *Exponentielle d'un complexe*

Si $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle de z vaut $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

5.2 Deux résultats revisités

On peut maintenant reprendre deux résultats vus dans le cadre des séries positives :

Proposition 2 — D'Alembert – V3

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes non-nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente.

Proposition 3 — Domination par une série positive convergente.

Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est à termes positifs et convergente, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

En pratique la rédaction aura la forme suivante : « $u_n = o(1/n^2)$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison à une série à termes positifs (convergente), $\sum u_n$ converge ».

5.3 Produit de Cauchy

On essaie ici de donner un sens raisonnable au produit de deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ (non nécessairement convergentes), disons $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ pour qu'ensuite, si les deux premières séries convergent, alors le produit $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ aussi... avec si possible $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Exercice 32. *Calcule le produit* $(u_0 + u_1 + u_2 + u_3)(v_0 + v_1 + v_2 + v_3)$*, et constate qu'il ne vaut pas (toujours)* $u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ *!*

Définition 9 — *Produit de Cauchy*

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont deux séries, leur produit de Cauchy est la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Remarque : Lorsqu'il n'y a pas convergence absolue des séries, des choses un peu pénibles peuvent se passer. Par exemple, si $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente, mais la série produit $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$ diverge. Cet exemple est dû au grand Cauchy lui-même ! Pire, on peut trouver [21] des produits convergents de séries convergentes... mais pour lesquels la somme du produit de Cauchy n'est pas égale au produit des sommes des séries initiales. Pouah !

Comme souvent, la convergence absolue arrange bien nos affaires.

Théorème 17 — *Convergence des produits de Cauchy*

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ également, et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Preuve (hors programme) : On se place sous les hypothèses de l'énoncé. Un petit dessin tout d'abord : on va comparer $P_1 = \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)$ et $P_2 = \sum_{n=0}^{2N} w_n$ (les $(N+1)^2$ termes de P_1 sont présents dans P_2 ; il s'agit donc de majorer la différence...) :

21. Pour ce type d'obscénités, on pourra consulter « Contre-exemples en mathématiques » de Bertrand Hauchecorne, chez Ellipses.

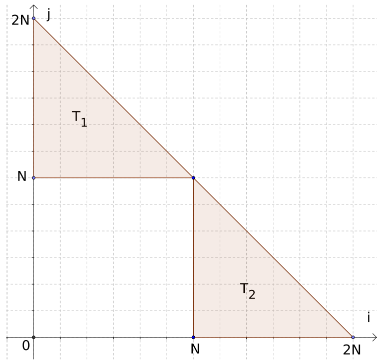

Figure 10 – Il y a deux zones symétriques d'indices à traiter

C'est parti ! On note $S_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ et $S_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |v_n|$. On a alors d'abord par inégalité triangulaire :

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right) - \sum_{n=0}^{2N} w_n\right| \leqslant \underbrace{\sum_{i=N+1}^{2N}\sum_{j=0}^{2N-i} |u_i|\,|v_j|}_{T_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=N}^{2N-i} |u_i|\,|v_j|}_{T_2}$$

Ensuite, en deux majorations simples on obtient $T_1 \leqslant S_2 \sum\limits_{i=N+1}^{+\infty} |u_i|$, et bien entendu de façon symétrique $T_2 \leqslant S_1 \sum\limits_{j=N+1}^{+\infty} |v_j|$, et il vient alors :

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

(bien entendu, les deux séries du membre de droite sont convergentes puisque absolument convergentes).
Pour conclure, on pourrait traiter les termes impairs... ou encore montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$ est absolument convergente, par exemple grâce à la majoration (en 12 temps s'il le faut) :

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$$

■

Remarque : En s'y prenant plus finement, on peut voir que la convergence **absolue** n'est requise que pour l'une des deux séries.
Exemple : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Les séries définissant e^{z_1} et e^{z_2} sont absolument convergentes. On a donc (en plus de la convergence du terme central) :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\,\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}_{(z_1+z_2)^n}.$$

On vient d'établir une formule aussi raisonnable qu'utile :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}.$$

5.4 Transformation d'Abel (H.P.)

Signalons pour terminer une technique qui est la version discrète de l'intégration par parties : pour sommer un produit, on voit l'un des deux termes « comme une dérivée », i.e. : comme la différence de deux termes consécutifs d'une suite (à savoir : sa somme partielle !). Plus précisément : on suppose que

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de complexes, et on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(S_k - S_{k-1}\right) v_k = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k v_k - \sum_{K=2}^{n+1} S_K v_{K-1} \\ &= \left(S_0 v_0 - S_{n+1} v_n\right) + \sum_{k=1}^{n} S_k \left(v_k - v_{k-1}\right).\end{aligned}$$

Attention, ce calcul est bien entendu à refaire à chaque fois ! Dans le résultat, vous voyez l'analogie avec l'intégration par parties ?
Voici une application typique de cette transformation d'Abel :
Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{n} \cdot$ Si $\theta = 0\ [2\pi]$, alors la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge. On suppose donc maintenant $\theta \neq 0\ [2\pi]$. On calcule de façon classique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \cdots = \mathrm{e}^{ni\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

donc $|S_n| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La transformation d'Abel fournit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \mathrm{e}^{i\theta} - \frac{1}{n} S_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} S_k \left(v_k - v_{k-1}\right).$$

On a $v_k - v_{k-1} \sim \dfrac{1}{k^2}$ donc $S_k \left(v_k - v_{k-1}\right) = O(1/k^2)$, donc la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} S_k \left(v_k - v_{k-1}\right)$ est absolument convergente, donc convergente, donc $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{n}$ est convergente.

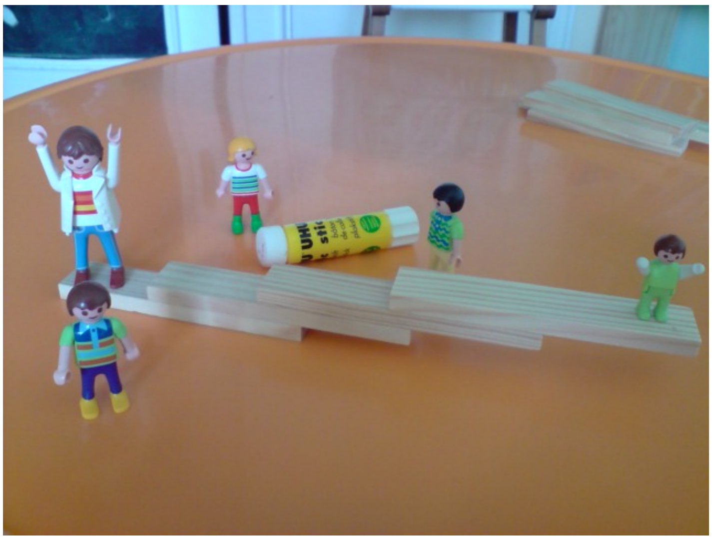

Figure 11 – Huhu !