Psi 999 – 2024/2025 ψ **DS 1 – 4 heures**

Le 14 septembre 2024 – calculatrices autorisées

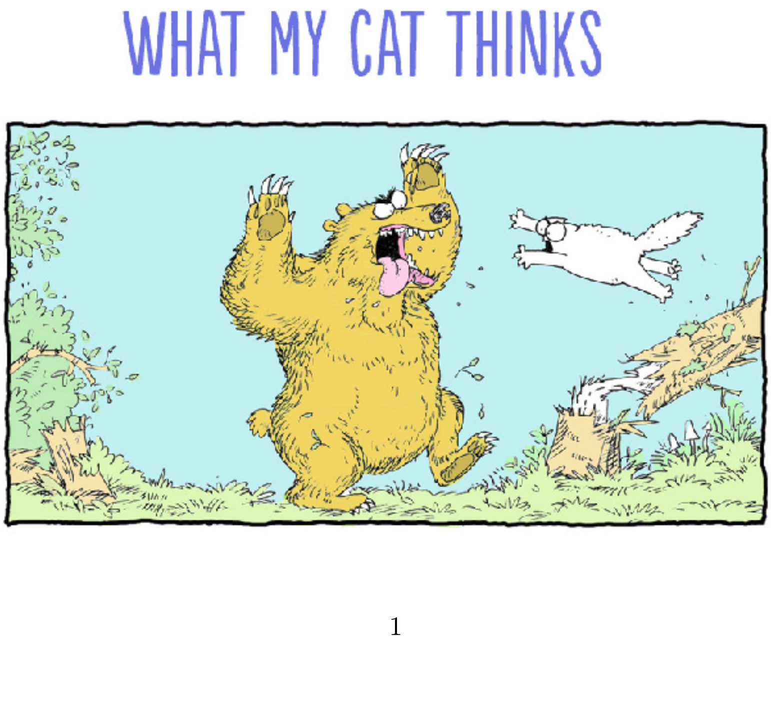
Ce DS se déroule en deux temps : la première partie, que vous avez sous les yeux, sera traitée en premier et sur une copie (ou plusieurs) à part, et rendue entre 9H (pas avant : soignez le travail !) et 9H15 (pas après : il faut avancer...).
Pour la deuxième partie, les 5/2 audacieux auront le droit de demander une version un peu plus difficile (et aussi probablement intéressante). Les 3/2, ainsi que les 5/2 prudents, feront tranquillement la version « standard ».

Enjoy !

1 Sans grande surprise : $u_{n+1} = f(u_n)$

On note ici $\varphi : x \mapsto x(x-2)(x-4)$, et $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{10}\varphi(x)$. On va étudier des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ceci pour sept valeurs initiales u_0 différentes.
Si vous savez utiliser votre calculatrice (correctement et (donc) rapidement) vous pouvez bien entendu observer le comportement de ces suites.

1. Étudier rapidement φ (en particulier, son signe...). Représenter son graphe.
2. Étudier les variations de f puis représenter son graphe.
3. Montrer que l'intervalle $I_1 = [0, 2]$ est stable par f. Préciser d'autres intervalles qui semblent stables... et pertinent !
4. Étudier la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Bien entendu : pas de dessin, pas de point...
5. Écrire une fonction Python prenant en entrée u_0 et n, et retournant u_n. Comment utiliser cette fonction pour obtenir les 10 premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $u_0 = 1$) ?
6. Reprendre l'étude lorsque $u_0 = 0$, puis $u_0 = -1$, puis $u_0 = 2$, $u_0 = 3$, $u_0 = 4$, et enfin $u_0 = 5$.



Suite pour les 3/2, ainsi que les 5/2 prudents

Les 5 premiers points sont des petits exercices très proches de ce qui a été fait en cours.

2 Une limite

Montrer que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^3 \ln(\cos(1/n))}$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme il se doit on précisera les DL ou équivalents utilisés. Non, ils ne vont pas de soi !

3 Une intégrale

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$. Donner ensuite (en justifiant soigneusement) UNE primitive de l'application

$$\varphi : x > 0 \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot$$

4 Sans utiliser « d'Alembert » bien sûr...

Soit u une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot$ Montrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5 À démontrer à la main bien entendu...

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente, alors que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

6 Des systèmes linéaires

1. Résoudre le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 17 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$
2. Résoudre le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 17 \\ x & + & 6y & - & 7z & = & -23 \end{array}\right.$
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner (en justifiant !) le nombre de solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 17 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \end{array}\right.$$

7 Vaguement classique

On considère deux réels a, b tels que $0 < a < b$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}\cdot$$

1. On pose $w_n = n^{b-a}\, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Après avoir justifié l'existence du logarithme, montrer que $\ln w_{n+1} - \ln w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$

(b) Montrer que la suite $(\ln w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(c) En déduire qu'il existe un réel $L > 0$ tel que $u_n \sim \frac{L}{n^{b-a}}\cdot$

(d) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de a et b.

2. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. On note $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.

(a) En considérant ses sommes partielles, montrer que la série $\sum v_n$ converge.

(b) Relier $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ à $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(c) Montrer que $v_n = bu_{n+1} - au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) En déduire $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ en fonction de u_0, a et b uniquement.

8 Des séries d'un type particulier

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.
   On admet que la somme de cette série vaut e^x.

2. On s'intéresse ici à la série $\sum \frac{n^2-1}{n!}3^n$.

(a) Justifier la convergence de cette série.

(b) Justifier que $(1, X, X(X-1))$ constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et décomposer $X^2 - 1$ dans cette base.

(c) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!}3^n$.

3. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire (polynôme à coefficients entiers, le coefficient dominant étant égal à 1). On fixe par ailleurs $\alpha \in \mathbb{Z}$.
   Justifier la convergence de $\sum \frac{P(n)}{n!}\alpha^n$ et montrer que la somme de cette série est de la forme $A\mathrm{e}^\alpha$, où A est **un entier**.

Suite pour les 5/2 confiants

2 Quelques évaluations de restes

On va voir dans ce problème quelques techniques permettant d'évaluer des équivalents puis des développements asymptotiques de restes de séries convergentes.

À titre exceptionnel, il y a UNE question en ε... et c'est la première ! *Cette question n'est pas simple mais est tout à fait traitable. Attention, je ne la corrigerai que si vous commencez par expliquer CE QUE VOUS ENTENDEZ MONTRER, puis vous fixez $\varepsilon > 0$, et que vous terminez par une majoration d'une certaine quantité par ε (juste avant de conclure). Si en plus les valeurs absolues sont correctement traitées, ça rapportera évidemment beaucoup !*

2.1 Sommation des relations de comparaison

On ne s'intéresse ici qu'à des séries de réels.

1. Prouver que si $\alpha_n = o(\beta_n)$ avec $\beta_n > 0$ et $\sum\limits_n \beta_n$ convergente, alors $\sum\limits_n \alpha_n$ est convergente, et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k\right)$.
2. Prouver que si $a_n \sim b_n$ avec $b_n > 0$ et $\sum\limits_n b_n$ convergente, alors $\sum\limits_n a_n$ est convergente, et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

Ici, les ε sont interdits, mais on pourra utiliser le résultat de la question précédente !

On admettra pour toute la suite du problème les résultats analogues dans le cas où $\sum \beta_n$ diverge et est à termes positifs :
— si $\alpha_n = o(\beta_n)$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k\right)$ (sans information de divergence sur $\sum\limits_n \alpha_n$) ;
— si $\alpha_n \sim \beta_n$, alors $\sum \alpha_n$ diverge, et $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k$.

3. Énoncer soigneusement (mais sans démonstration) le théorème relatif aux séries alternées. On donnera en particulier les informations connues sur le reste.

2.2 Développement asymptotique des restes de Riemann

On s'intéresse au reste de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$. On commence par traiter le cas $\alpha = 3$ en détail, avant de généraliser.

1. À l'aide d'une comparaison somme-intégrale, établir un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{K_1}{n^\beta},$$

avec K_1 et β à déterminer.

On commencera par encadrer une somme de la forme $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3}$, puis on ne libérera SURTOUT PAS n et N en même temps ! Je serai extrêmement vigilant sur les « on passe à la limite » qui ne veulent rien dire...

2. Avec des justifications rapides, donner un résultat de même nature pour $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

3. On pose maintenant :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{K_1}{n^\beta}.$$

Attention, prenez les « vraies » valeurs de K_1 et β, c'est-à-dire celles exhibées à la première question !

Déterminer K_2 et γ tels que :

$$u_{n-1} - u_n \sim \frac{K_2}{n^\gamma}.$$

4. Justifier [1] l'écriture : $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (u_{k-1} - u_k)$.

5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

6. Avec une rapide justification, obtenir de même un développement asymptotique à deux termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

7. Comment obtenir un développement asymptotique à trois termes ? *Ici je ne demande que les idées.*

8. Donner un développement asymptotique à trois termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

2.3 Un cas alterné

1. Montrer soigneusement :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$; donner le signe et un majorant de $|R_n|$, avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

3. Montrer :

$$\forall n \geqslant 0, \qquad R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

On pourra calculer la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ *en la voyant comme une intégrale...*

4. En déduire [2] :

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{K}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right),$$

avec α et K à déterminer.

5. Justifier la convergence, puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} R_n$.

---

1. Non, pas avec les mains.
2. Éventuellement après une intégration par parties...