Le 14 septembre 2024 – calculatrices autorisées

1 Sans grande surprise : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. φ est dérivable, de dérivée $\varphi'(x) = 3x^2 - 12x + 8$, trinôme dont les racines sont $x_1 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \in [0, 2]$ et $x_2 = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \in [2, 4]$. On en déduit les variations de φ :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_1)$	$\searrow$	$\varphi(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Le signe de φ est clair, si on sait faire un tableau de signe : φ est > 0 sur $]0, 2[\cup]4, +\infty[$, < 0 sur $]-\infty, 0[\cup]2, 4[$, et nul en 0, 2 et 4.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x		$-$	0			$+$			
$x-2$		$-$			0		$+$		
$x-4$			$-$				0		$+$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Il reste à représenter φ :

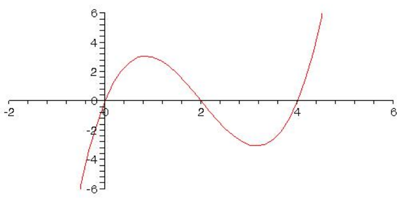

FIGURE 1 – Graphe de φ

2. f est dérivable, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{10}(3x^2 - 12x + 18) = \frac{3}{10}(x^2 - 4x + 6)$. Cette dérivée reste à valeurs strictement positives ($\Delta > 0$ par exemple...), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

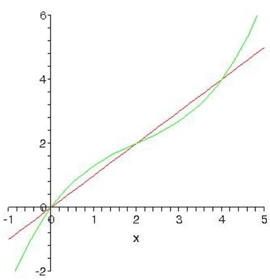

FIGURE 2 – Graphe de f

3. La croissance de f, et le fait que 0, 2 et 4 sont points fixes nous assurent que $I_0 =]-\infty, 0]$, $I_1 = [0, 2]$, $I_2 = [2, 4]$ et $I_3 = [4, +\infty[$ sont stables par f. Précisons cela pour I_1 :
   Si $x \in I_1$, alors $0 \leqslant x \leqslant 2$, donc par croissance de f sur $\mathbb{R}$, on aura $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2) = 2$, donc $f(x) \in [0, 2] = I_1$. ■

   $$\boxed{I_1 \text{ est stable par } f}$$

   Bien entendu :
   — *Ceux qui auront écrit d'inutiles équivalences les auront évidemment justifiées correctement (et n'en n'auront rien fait).*
   — *Ceux qui ont préféré parler des intervalles ouverts auront justifié cela avec la stricte croissance.*
   Bien entendu...

4. Un petit dessin pour commencer :

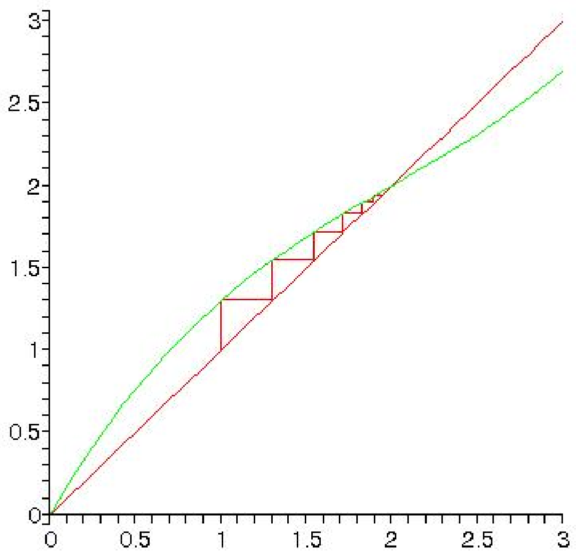

FIGURE 3 – La construction usuelle

   Supposons $u_0 = 1$. u_0 est alors dans l'intervalle I_1, qui est stable par f. Une récurrence immédiate nous assure alors que tous les u_n sont dans I_1. Comme c'est la première fois, rédigeons-là :
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in I_1$ ».
   — $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée par hypothèse.
   — Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_n \in I_1$, et puisque I_1 est stable par f, on en déduit $f(u_n) \in I_1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I_1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
   Le principe de récurrence nous permet de conclure : $\mathcal{P}(n)$ est bien vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Si $x \in I_1$ alors $f(x) \geqslant x$, or tous les u_n sont dans I_1, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$, donc u est croissante et majorée par 2, donc convergente vers ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$. La preuve doit contenir les buzzwords standards : continuité, suite extraite, unicité de la limite. Plus précisément (!) :
   Par continuité de f en ℓ, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Par ailleurs (u_{n+1}) étant extraite de (u_n), on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Mais $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$.
   On a donc $\ell \in \{0, 2, 4\}$. L'encadrement $u_0 \leqslant u_n \leqslant 2$ passé à la limite fournit $1 = u_0 \leqslant \ell \leqslant 2$, donc $\ell = 2$:

   $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$$

5. On commence par définir f, pour des questions de lisibilité. Ensuite on peut choisir entre la récursivité et l'itératif :

```
def f(x):
    return x+x*(x-2)*(x-4)/10

def u(u0, n):
    if n == 0:
        return u0
    return f(u(u0, n-1))   # else possible mais facultatif; pourquoi ?

def ubis(u0, n):
    courant = u0 # le terme courant
    for k in range(1, n+1):  # calculons u_k
        courant = f(courant)
    return courant
```

On peut maintenant obtenir les 10 premiers termes, donc $u_0, ..., u_9$ via :

```
In [2]: [u(1, n) for n in range(10)]
Out[2]:
[1, 1.3, 1.5457, 1.7180437708993002, 1.8285847298286029, 1.896647165068826,
 1.9378778995223496, 1.9627027658296583, 1.9776164711404307, 1.9865687612194036]
```

Bien entendu, personne n'aura fait la double erreur de raisonnement « je vais obtenir $u0, ..., u_{10}$ via `[u(1, n) for n in range(10)]` »

6. (a) Si $u_0 = 0$: $u_1 = f(u_0) = 0$, puis par récurrence immédiate, tous les u_n sont égaux à 0. La suite est constante.

   (b) Si $u_0 = 2$ ou $u_0 = 4$: le raisonnement précédent s'applique et la suite est à nouveau constante.

   $$\boxed{\text{Si } u_0 \in \{0, 2, 4\} \text{ alors } (u_n) \text{ est constante.}}$$

   (c) Si $u_0 = 3$, on montre comme dans le cas $u_0 = 1$ que tous les u_n sont dans $I_2 = [2, 4]$, puis (sachant que $f(x) \leqslant x$ sur cet intervalle) que la suite est décroissante et convergente vers une limite... qui ne peut être que 2 (même type de localisation de la limite que dans le premier cas).

   $$\boxed{\text{Si } u_0 = 3 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$$

   (d) Si $u_0 = -1 \in I_0$: I_0 est stable par f, donc tous les u_n sont dans I_0. Sur cet intervelle, $f(x) \leqslant x$, donc u est décroissante. Si elle admettait une limite finie ℓ, celle-ci serait dans $\{0, 2, 4\}$. Mais l'inégalité $u_n \leqslant u_0$ passée à la limite fournit $\ell \leqslant -1$, ce qui est absurde. u est donc **décroissante et non convergente**, donc tend vers $-\infty$.

   $$\boxed{\text{Si } u_0 = -1 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}$$

   (e) Le cas $u_0 = 5$ se traite comme lorsque $u_0 = -1$: tous les u_n sont dans $I_3 = [4, +\infty[$, puis : u est croissante et non convergente, donc divergente vers $+\infty$.

   $$\boxed{\text{Si } u_0 = 5 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Suite pour les 3/2, ainsi que les 5/2 prudents

2 Une limite

Tout d'abord :

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^3 \ln(\cos(1/n))} = \exp\left(n^3 \ln(1-1/n) \ln\left(\cos(1/n)\right)\right),$$

et on va donc essayer de déterminer la LIMITE du terme dans l'exponentielle. Pour déterminer la limite de ce produit, on va en exhiber un ÉQUIVALENT simple. Déjà, $\ln(1-1/n) \sim -\frac{1}{n}$, donc il n'y a plus grand chose à faire (mais on peut encore raconter des bêtises, en confondant par exemple égalités et équivalents...). Puisque

$$\cos(1/n) = 1 \underbrace{- \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)}_{\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0},$$

on a :

$$\ln\left(\cos(1/n)\right) = \ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \sim -\frac{1}{2n^2},$$

donc

$$n^3 \ln(1-1/n) \ln\left(\cos(1/n)\right) \sim n^3 \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2},$$

donc (évidemment, on ne passe pas les équivalents à l'exponentielle ; évidemment...)

$$v_n = \ln(u_n) = n^3 \ln(1-1/n) \ln\left(\cos(1/n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et finalement, par *continuité* de la fonction exponentielle en $\frac{1}{2}$:

$$\boxed{u_n = \mathrm{e}^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{1/2}.}$$

3 Une intégrale

Il semble raisonnable (pour enlever la racine, et sachant que ça se passera bien avec le logarithme) de faire le changement de variable[1] $t = u^2$ (ou bien $u = \sqrt{t}$) : on a alors $dt = 2udu$, puis :

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\ln u}{u} 2udu = 4\big[t\ln t - t\big]_1^{\sqrt{2}}$$

(ben oui, on a fini par retenir cette fichue primitive du logarithme ; sinon, on intègre par parties). Finalement :

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{2}\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}.}$$

On sait (théorème fondamental de l'analyse) qu'**une** primitive de φ est l'application

$$\Phi : x > 0 \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt.$$

1. L'application $u \mapsto u^2$ (resp. $t \mapsto \sqrt{t}$) étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$ (resp. $[1, 2]$).

Un calcul semblable au précédent fournit :

$$\forall x > 0, \qquad \Phi(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2\ln u}{u} 2u du = 4\big[t\ln t - t\big]_1^{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x + 4 - 4\sqrt{x}.$$

Si on veut calculer UNE primitive formellement (avec les dangers de ce type d'écriture), voila ce que ça donne, avec le changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$\Phi(x) = \int \frac{2\ln u}{u} 2u du = 4\,(u\ln u - u) = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}.$$

Qu'on ait pris le premier ou le second point de vue :

$$\boxed{\textbf{Une} \text{ primitive de } \varphi \text{ est l'application : } x > 0 \longmapsto 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}.}$$

Pour cet exercice déjà donné dans le passé, la solution majoritairement proposée dans les copies consistait à faire une intégration par parties (en dérivant $t \mapsto \ln t$*) ; cette solution était effectivement plus rapide/simple. J'ai laissé ma version pour que vous constatiez que la première chose à laquelle on pense peut marcher... sans être la plus pertinente/efficace.*

4 Sans utiliser « d'Alembert » bien sûr...

Tout d'abord, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$, donc un petit dessin (par exemple) nous invite à prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ puis annoncer qu'il existe un rang, disons n_0, au delà duquel

$$1/2 - 1/4 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1/2 + 1/4,$$

donc en particulier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 3/4$, ou encore (les termes sont tous positifs) $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}u_n$. Cette relation étant vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on obtient $u_{n_0+1} \leqslant \frac{3}{4}u_{n_0}$, puis $u_{n_0+2} \leqslant \frac{3}{4}u_{n_0+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_{n_0}$ et ensuite (récurrence immédiate sur p) $u_{n_0+p} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^p u_{n_0}$ pour tout $p \geqslant 0$, soit encore :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n_0} u_{n_0} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Et comme $3/4 < 1$, le membre de droite converge vers 0 ; ainsi (d'après le théorème des gendarmes) :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

5 À démontrer à la main bien entendu...

C'est du cours de première année... qu'il s'agissait de ré-établir ! Dans les deux cas, le comportement (convergence ou divergence) de la série *est celui de* la suite des sommes partielles *(ben oui, par définition...).*

— Notons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\cdot$ Pour montrer la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par noter que cette suite est croissante ($S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant S_n$) et il suffit donc de montrer qu'elle est majorée (et pas par une autre suite, BIEN ENTENDU). L'outil essentiel dans ce type de situation est la comparaison somme-intégrale.

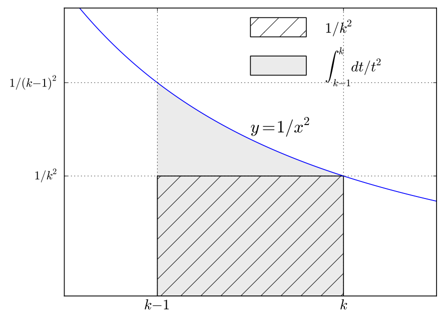

FIGURE 4 – Toujours le même dessin

Le dessin usuel (figure 1) commence par nous convaincre que pour $k-1>0$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}\cdot$ Pour montrer cette relation cruciale, on peut (sur ce cas très précis) calculer le membre de droite et constater qu'accidentellement il est minoré par celui de gauche. Mais il vaut bien mieux ne rien calculer, et plutôt noter que pour t tel que $k-1 \leqslant t \leqslant k$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, puis intégrer l'inégalité entre les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{k^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\cdot$ On obtient alors :

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}\cdot$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 2 à $n \geqslant 2$ fixé, on obtient après Chaslisation :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2},$$

puis :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n}\cdot$$

Sauf à vouloir faire une petite farce, on ne conclut pas directement quand au caractère majoré de (S_n) (le membre droite dépend de n...). Par contre, sans gros effort (mais sans demi-passage d'inégalité à la limite, misérables !), on obtient $S_n \leqslant 2$, qui est cette fois une majoration convenable. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge.

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

— Notons maintenant, pour $n \geqslant 1$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$ Pour montrer la divergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on va *minorer* S_n, grâce à nouveau à une comparaison somme-intégrale.

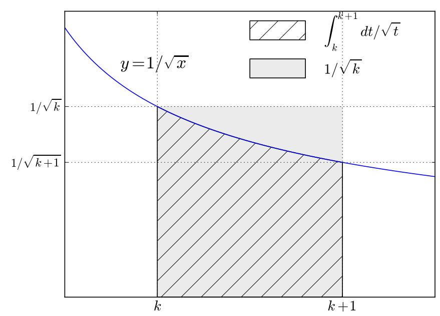

FIGURE 5 – Le dual du dessin précédent.

Les techniques précédentes nous assurent que pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}\cdot$ Une sommation plus tard, on obtient

$$S_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2t^{1/2}\right]_1^{n+1} = 2\left(\sqrt{n+1}-1\right).$$

Comme le membre de droite tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ il en va de même pour le membre de gauche.

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

6 Des systèmes linéaires

Il s'agira bien entendu toujours de pivoter, sans la moindre fantaisie...

1. Après deux étapes de pivot on tombe sur un système triangulaire, qu'on remonte en une étape (et de bas en haut !) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 17 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \\ & - & 2y & + & 4z & = & 10 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow 5L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \\ & & & & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & -2+3+1=2 \\ y & = & -(21-6)/5=-3 \\ z & = & 8/8=1 \end{array}\right.$$

Le système possède donc une unique solution :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(2,-3,1)\}}$$

2. Cette fois après une étape de pivot, la troisième équation est colinéaire à la deuxième, donc disparaît à la deuxième étape :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 17 \\ x & + & 6y & - & 7z & = & -23 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \\ & & 5y & - & 6z & = & -21 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce dernier système se résout en basculant z dans le membre de droite (il devient un paramètre), et en remontant le système triangulaire ainsi constitué (en une étape) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & -2-y+z = 11/5 - z/5 \\ y & = & -(21-6z)/5 = -21/5 + 6z/5 \end{array}\right.$$

Il y a donc une infinité de solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(11/5 - z/5, -21/5 + 6z/5, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

3. Cette fois après deux étapes de pivot on arrive à une équation d'un type bien connu : $\alpha z = \beta$, et il faut discuter sur α et β !

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 17 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \\ & & (b-a)y & + & (c+a)z & = & d+2a \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow 5L_3+(b-a)L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 6z & = & 21 \\ & & & & (-a+6b+5c)z & = & -11a+21b+5d \end{array}\right.$$

Il reste à conclure :

- Si $-a+6b+5c \neq 0$, alors le système possède une unique solution (première question de l'exercice).
- Si $-a+6b+5c=0$ et $-11a+21b+5d=0$, alors il possède une infinité de solutions (deuxième question de l'exercice).
- Si $-a+6b+5c=0$ et $-11a+21b+5d \neq 0$, alors il ne possède pas de solution.

7 Vaguement classique

1. (a) Déjà, la relation de récurrence nous assure par récurrence immédiate que tous les u_n sont strictement positifs, ce qui nous autorise à prendre leur logarithme. On effectue ensuite un développement limité de $\ln w_{n+1} - \ln w_n$:

$$\begin{aligned}\ln w_{n+1} - \ln w_n &= (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right) \\ &= \frac{b-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{b-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

***Attention**, on ne peut pas se contenter d'un développement en $o(1/n)$ et affirmer ensuite que $o(1/n) = O(1/n^2)$, car c'est généralement faux (penser à $1/n^{3/2}$) !*

$$\boxed{\ln w_{n+1} - \ln w_n = O(1/n^2).}$$

(b) On en déduit, par comparaison à une série *à termes positifs*, que $\sum(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$ converge *absolument*, et donc converge. Finalement, grâce à la dualité suites/séries :

$$\boxed{\text{la suite } (\ln w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

(c) La suite $(\ln w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = \mathrm{e}^{\ell} > 0$ (par continuité de la fonction *exponentielle* en ℓ : c'est bien l'écriture $u_n = \exp(\ln(u_n))$ qui nous permet de conclure). On en déduit que :

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} w_n > 0 \qquad \text{puis} \qquad u_n \sim \frac{L}{n^{b-a}}.}$$

(d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives. L'équivalent de u_n permet de conclure, par comparaison à une série *à termes positifs* (en l'occurrence de Riemann), que :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a>1.}$$

2. (a) Un simple calcul de sommes partielles montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N} nu_n - \sum_{n=0}^{N} nu_{n+1} = \sum_{k=0}^{N} ku_k - \sum_{k=1}^{N+1}(k-1)u_k = \sum_{k=1}^{N} u_k - N\,u_{N+1}.$$

À la deuxième étape, on a renommé l'indice de la première somme, et on a réalisé un changement d'indice dans la deuxième.

Ensuite, comme on est ici dans le cas $b-a>1$, on a $N\,u_{N+1} \sim \frac{L}{N^{b-a-1}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

(b) D'après la question précédente et en passant à la limite lorsque $N \to \infty$ (tous les termes étant convergents, et de limite connue), on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.}$$

(c) On obtient cette formule en multipliant par les dénominateurs la relation définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = b\,u_{n+1} - a\,u_n.}$$

C'est terrible, mais d'expérience je sais que ce simple calcul sur des fractions... va être une boucherie !

(d) Notons $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$. La question précédente nous donne (en sommant pour n allant de 0 à $+\infty$, toutes les séries étant convergentes) :

$$S - u_0 = b(S - u_0) - aS,$$

et donc :

$$\boxed{S = \frac{b-1}{b-a-1}\,u_0.}$$

Si vous avez des états d'âme pour sommer directement entre 0 et $+\infty$, n'hésitez pas à passer par des sommes partielles.

8 Des séries d'un type particulier

1. Il n'est pas déraisonnable de d'Alembertiser dans ce contexte. La convergence est claire si $x = 0$. Sinon, on considère pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{x^n}{n!}\cdot$ On a alors tous les u_n non nuls, avec $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum |u_n|$ converge, donc :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}}$$

2. (a) Notons $u_n = \dfrac{n^2-1}{n!}3^n$: ici encore d'Alembert est raisonnable (les termes sont bien non nuls pour $n \geqslant 2$, et les quotients s'évaluent sans mal), et nous donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$\boxed{\sum \frac{n^2-1}{n!}3^n \text{ converge.}}$$

(b) La famille $(1, X, X(X-1))$ est constituée de 3 polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ échelonnés en degrés, donc [2] constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
La décomposition peut se faire à la volée : Pour obtenir X^2, il nous faut amener une fois $X(X-1)$; on regarde alors ce qui reste !

$$\boxed{X^2 - 1 = 1 \times X(X-1) + X - 1 = 1 \times X(X-1) + 1 \times X - 1 \times 1}$$

(c) On utilise la décomposition précédente pour casser la série demandée en trois autres séries **qui sont toutes convergentes** [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}3^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!}3^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}3^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}3^n$$

La dernière somme vaut e^3. Pour la première, la somme peut partir de $n = 2$ puisque les deux premiers termes sont nuls. On peut alors écrire $\dfrac{n(n-1)}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, et on fait le même travail pour la deuxième somme. Le changement d'indice $p = n - 2$ ($p = n - 1$ dans la deuxième somme) fournit alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}3^n = (9 + 3 - 1)\mathrm{e}^3 = 11\mathrm{e}^3}$$

3. On va évidemment singer les raisonnements faits dans l'exemple. Il s'agit de décomposer P dans la base qu'on imagine. Notons d le degré de P.

2. Attention : « échelonné » signifie « les degrés sont différents », ce qui ne donne que la liberté. On peut conclure avec le cardinal.
3. Radar automatique : les yeux du correcteur vont vérifier que vous ne croyez pas que la convergence de $\sum(u_n + v_n)$ implique la convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$

— La famille $(1, X, X(X-1), ..., X(X-1)...(X-d+1))$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ (famille échelonnée de bon cardinal).
— Dans la décomposition de P dans cette base, tous les coefficients seront entiers. On en est assez convaincu si on a décomposé soi-même X^2-1 dans $(1, X, X(X-1))$ et qu'on imagine ce qu'on ferait dans le cas général. Pour formaliser les choses, on pourrait prouver par récurrence sur d la proposition « Tout polynôme de $\mathbb{Z}_d[X]$ peut se décomposer comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de $(1, X, X(X-1), ..., X(X-1)...(X-d+1))$ ».
— On écrit alors (toutes les séries étant convergentes et les a_i entiers) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}\alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{d} a_i \frac{n(n-1)...(n-i+1)}{n!}\alpha^n\right) = \sum_{i=0}^{d}\left(a_i \sum_{n=i}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n-i)!}\right)$$

Et après factorisation de α^i et changement d'indice :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}\alpha^n = \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha^i \mathrm{e}^{\alpha}$$

Et comme α est un entier, $A \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha^i$ l'est également.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}\alpha^n = A\mathrm{e}^{\alpha} \text{ pour un certain entier } A.}$$

Suite pour les 5/2 confiants

2 Quelques évaluations de restes

2.1 Sommation des relations de comparaison

1. *Dans la première partie, je prouve la convergence (absolue) de $\sum \beta_n$, mais vous pouviez aussi considérer que c'est du cours !*
On se place sous les hypothèses de l'énoncé. On note que cela impose $|\alpha_n| = o(\beta_n)$. On va privilégier cette série à termes positifs $\sum_n |\alpha_n|$.

Le rapport $\dfrac{|\alpha_n|}{\beta_n}$ tend vers 0, donc pour n assez grand, disons $n \geqslant N$, on a $0 \leqslant \frac{|\alpha_n|}{\beta_n} \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant |\alpha_n| \leqslant \beta_n$. On a alors :

$$\forall n \geqslant N, \qquad \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| + \sum_{k=N}^{n} \beta_k \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| + \sum_{k=N}^{+\infty} \beta_k$$

(on a majoré la somme partielle de la série de réels *positifs* $\sum_{n\geqslant N} \beta_n$ par la somme « totale » ; il n'est pas question d'un passage partiel d'inégalité à la limite !). Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée [4] donc est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum \alpha_n \text{ est donc absolument convergente, donc convergente.}}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$, et montrons que pour n assez grand, on aura

$$0 \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k.$$

Il existe un rang N au delà duquel $0 \leqslant |\alpha_k| \leqslant \beta_k$. Si on fixe $n \geqslant N$ et $p \geqslant n+1$, on a alors par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} \alpha_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \underbrace{|\alpha_k|}_{\leqslant \varepsilon\beta_k} \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} \beta_k.$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, les membres de droite et de gauche admettent l'un et l'autre une limite. On peut alors passer cette inégalité à la limite en p, pour obtenir exactement le résultat souhaité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant N, \qquad \left|\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k}{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k}\right| \leqslant \varepsilon.$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha_n = o(\beta_n) \text{ avec } \beta_n > 0 \text{ et } \sum \beta_n \text{ convergente, alors } \sum \alpha_n \text{ est convergente, et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k\right).}$$

2. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a $a_n = b_n + o(b_n)$, donc on pose $\alpha_n = a_n - b_n$ et $\beta_n = b_n$, de sorte que $\alpha_n = o(\beta_n)$. Puisque $\sum_n \beta_n$ est convergente à termes positifs, on a $\sum_n \alpha_n$ convergente, avec $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \beta_k\right)$. Mais puisque $a_n = b_n + \alpha_n$, cela nous assure que $\sum_n a_n$ est convergente, avec de plus $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k + o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$, et donc :

4. Oui, par une constante...

$$\boxed{\text{Si } a_n \sim b_n \text{ avec } b_n > 0 \text{ et } \sum_n b_n \text{ convergente, alors } \sum_n a_n \text{ est convergente, et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.}$$

3. Si $\sum\limits_n \alpha_n$ est une série (de réels) alternée (i.e. : $((-1)^n\alpha_n)_n$ est de signe constant) avec $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 *en décroissant*, alors :
   — $\sum\limits_n \alpha_n$ est convergente ;
   — si $n \in \mathbb{N}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$, alors R_n est du signe de α_{n+1} (son premier terme), et $|R_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$.

2.2 Développement asymptotique des restes de Riemann

1. C'est reparti...

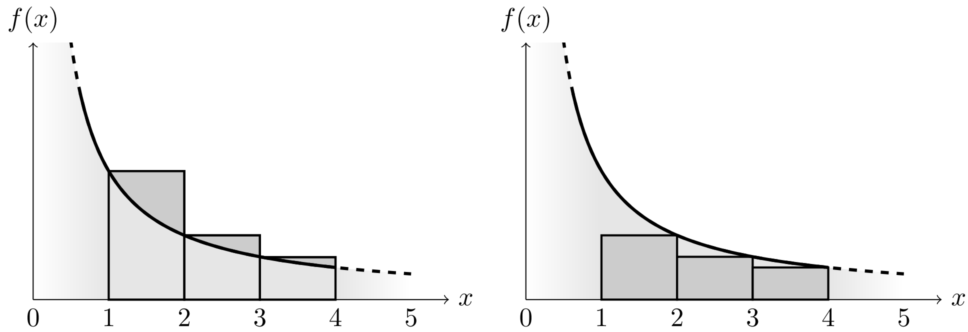

FIGURE 6 – Dans un sens... et dans l'autre avec $f(x) = 1/x^3$

On fixe $n \geqslant 1$ et N dans $\mathbb{N}$ tels que $n < N$, puis $k \in [\![n+1, N]\!]$ et enfin $t \in [k-1, k]$ (ils seront libérés dans l'ordre inverse de celui de leur arrivée à l'écran). Puisque $k \geqslant 2$, la décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur $[k-1, k] \subset [1, +\infty[$ assure que $\dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{t^3}$. Ceci étant valable pour tout $t \in [k-1, k]$, on peut intégrer cette inégalité pour obtenir $\dfrac{1}{k^3} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$. Un travail parfaitement symétrique fournit la minoration de $\dfrac{1}{k^3}$ qu'on imagine, et il n'y a plus qu'à sommer ces encadrements, pour k décrivant $[\![n+1, N]\!]$, pour obtenir :

$$\underbrace{\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^3}}_{(1/(n+1)^2 - 1/(N+1)^2)/2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \underbrace{\int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3}}_{(1/n^2 - 1/N^2)/2}.$$

Dans cet encadrement, **chacun des trois termes possède une limite (finie)** lorsque N tend vers $+\infty$. L'encadrement peut alors être passé à la limite en N, pour obtenir :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

En divisant tout le monde par $\dfrac{1}{2n^2}$, les termes extérieurs tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, donc les gendarmes nous assurent qu'il en va de même pour le terme central. On vient de prouver :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}.}$$

2. La décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ fournirait d'abord (les n et N étant fixés puis libérés comme plus haut) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^\alpha}$$

puis :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

en enfin (ce qui est cohérent avec le cas $\alpha = 3$) :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

3. On commence par calculer :

$$u_{n-1} - u_n = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2n^2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}\right).$$

Le développement limité $(1+u)^{-2} = 1-2u+\dfrac{(-2)(-3)}{2}u^2+o(u^2)$ fournit alors après simplifications : $u_{n-1} - u_n = -\dfrac{3}{2n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$, et donc :

$$\boxed{u_{n-1} - u_n \sim -\frac{3}{2n^4}.}$$

4. Il s'agit bien entendu (?) de considérer une somme partielle du reste... On fixe pour cela $N \geqslant n+1$, et on écrit après télescopage :

$$\sum_{k=n+1}^{N} (u_{k-1} - u_k) = u_n - u_N.$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, les deux membres admettent une limite finie : à droite c'est clair puisque $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci implique la convergence de la série du membre de gauche [5]. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient alors par unicité de la limite :

$$\boxed{u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_{k-1} - u_k).}$$

5. Les deux questions précédentes permettent d'appliquer le théorème de sommation des équivalents pour les restes de séries convergentes positives (bon, disons de signe constant !), et donc :

$$u_n \sim -\frac{3}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

La question 2 donne un équivalent de ce reste, donc de u_n. En revenant à la définition de u_n, on trouve finalement (et c'est cohérent avec le cas $\alpha = 3$) :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

Bon, j'ai vérifié avec Maple :

```
> asympt(sum(1/k**3,k=n+1..infinity),n,4);
```

5. On pouvait aussi voir que l'équivalent fourni à la question précédente est négatif et est le terme d'une série convergente...

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

6. Avec la même démarche, mais en serrant les dents pour ne pas craquer sous le poids du paramètre, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$$

```
> asympt(sum(1/k**alpha,k=n+1..infinity),n,20);
Error, (in asympt) unable to compute series
> asympt(sum(1/k**7,k=n+1..infinity),n,8);
```

$$\frac{1}{6n^6} - \frac{1}{2n^7} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

7. Il suffit de réitérer le procédé, en définissant $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \left(\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha}\right)$, en obtenant un équivalent simple de $v_{n-1} - v_n$ (de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha+2}}$, a priori), et en sommant pour obtenir un équivalent de v_n de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ a priori.
8. Yapluka ! Notons, pour $n > 0$:

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} - \left(\frac{1}{5n^5} - \frac{1}{2n^6}\right).$$

On a alors après calculs (la flemme...) :

```
> v:=n->sum(1/k**6,k=n+1..infinity)-(1/(5*n**5)-1/(2*n**6)):
  asympt(v(n-1)-v(n),n,8);
```

$$\frac{7}{2n^8} + O\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

Ainsi, $v_{n-1} - v_n \sim \frac{7}{2n^8}$, équivalent entre termes généraux positifs de séries convergentes : les restes sont alors équivalents, ce qui nous donne un équivalent de v_n toujours via la question 2, et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{2n^6} + \frac{1}{2n^7} + o\left(\frac{1}{n^7}\right)}$$

```
> asympt(sum(1/k**6,k=n+1..infinity),n,8);
```

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{2n^6} + \frac{1}{2n^7} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

2.3 Un cas alterné

1. Il n'est évidemment pas question d'écrire une petite blague de la forme :

$$\lim_n \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) = \int_0^1 (\lim_n f_n(x))dx.$$

Pour ce type d'interversion, les 5/2 auront peut-être appliqué le *théorème de convergence dominée*, qui s'appliquait très facilement ici, en dominant par l'application constante égale à 1.
De façon élémentaire, on pouvait également écrire :

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n,$$

puis intégrer cet encadrement pour obtenir

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

avant de gendarmiser.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. La série $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$ est bien alternée, et son terme général tend vers 0 en décroissant (en valeur absolue), donc d'après le théorème rappelé dans la première partie :

$$\boxed{\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n} \text{ est convergente, avec } R_n \text{ du signe de } (-1)^{n+1} \text{ et } |R_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot}$$

3. Fixons d'abord $n > 0$ et calculons la somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k-1} dx = -\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} \right) dx = \int_0^1 \frac{(-x)^n - 1}{1+x} dx.$$

On a alors (grâce à la première question) $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = -\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\cdot$ Mais par définition, $R_n = \ell - S_n$, donc on a bien comme annoncé :

$$\boxed{R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.}$$

4. On intègre par parties comme suggéré dans l'énoncé, en primitivant $x \mapsto x^n$:

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

D'une part, $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et d'autre part, la majoration $\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leqslant x^{n+1}$ nous assure que $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leqslant \frac{1}{n+2}$, de sorte que :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

```
> asympt(sum((-1)**k/k,k=n+1..infinity),n,2);
```

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5. La série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ est bien entendu convergente. Pour celle de terme général $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la comparaison à une série convergente à termes positifs nous assure son absolue convergence donc sa convergence.

Pour calculer la somme, on passe comme proposé par le calcul des sommes partielles, qui font à nouveau intervenir des sommes (finies) d'intégrales, donc des intégrales de sommes. La magie des suites géométriques fait le reste. Soit donc $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-x)^n \right) \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1} - 1}{(1+x)^2} dx.$$

D'une part, $-\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$, et d'autre part,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{(1+x)^2} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} R_n = -\frac{1}{2}.}$$

```
> sum(sum((-1)**k/k,k=n+1..infinity),n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (-1)^{n+1} \left(\Psi\left(1 + \frac{1}{2} n\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}\right) \right) \right)$$

```
> evalf(%);
```

$$-.5000000000$$

Les 5/2 ayant voulu écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *avaient deux résultats à leur disposition. Le premier réclame la convergence de la série* $\displaystyle\sum_n \int_0^1 |f_n|$ *: IL NE PEUT S'APPLIQUER (cette série diverge). Le second résultat réclame une convergence* uniforme *des sommes partielles* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ *sur le segment* $[0,1]$*. Le contrôle des restes de ces séries alternées par leur premier terme ne permet malheureusement pas de conclure (ce premier terme* $\dfrac{x^n}{1+x}$ *tend effectivement vers* 0*... mais pas uniformément sur* $[0,1]$*). Dommage...*