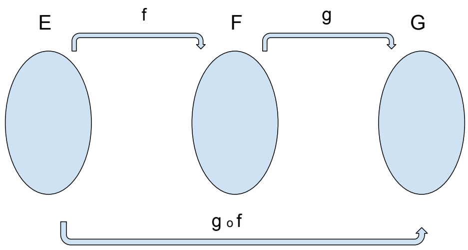
# 1 Composition de surjections

**Montrer que la composée de deux surjections est surjective.**

On commence par les patates, comme il se doit, ce qui fixe les notations :




Supposons donc que $f$ est une application surjective de $E$ dans $F$ et que $g$ est une application surjective de $F$ dans $G$. On va montrer que $g \circ f$, qui est une application de $E$ dans $G$, est surjective.
On fixe pour cela $z \in G$ et on veut montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.
Tout d'abord, la surjectivité de $g$ nous assure qu'il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$ (et on fixe $y$ ainsi).
Ensuite, la surjectivité de $f$ nous assure qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (et on fixe $x$ ainsi).
On a alors $(g \circ f)(x) = z$, ce qui était le point attendu.

$$\boxed{\text{La composée de deux surjections est bien une surjection.}}$$

# 2 Une limite

**Montrer que $\left(\ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{n}\right)\right)^{n\cos(1/n)}$ possède une limite quand $n$ tend vers $+\infty$.**

On a $\left(\ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{n}\right)\right)^{n\cos(1/n)} = \exp\left(n\cos(1/n)\ln\left(\ln\left(\mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{n\mathrm{e}}\right)\right)\right)\right)$ (on aura noté qu'à chaque étape on travaille un peu : le « e » a été factorisé dans le logarithme). Voyons les différents termes dans le produit.
Déjà, $n\cos(1/n) \sim n$, et par ailleurs $\ln\left(\mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{n\mathrm{e}}\right)\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n\mathrm{e}}\right) = 1 + \frac{1}{n\mathrm{e}} + o(1/n)$ donc

$$\ln\left(\ln\left(\mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{n\mathrm{e}}\right)\right)\right) = \ln(1+u) \sim u = \frac{1}{n\mathrm{e}} + o(1/n) \sim \frac{1}{n\mathrm{e}}$$

donc $u_n = n\cos(1/n)\ln\left(\ln\left(\mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{n\mathrm{e}}\right)\right)\right) \sim \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/\mathrm{e}$, donc **par continuité de l'exponentielle** :

$$\boxed{\left(\ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{n}\right)\right)^{n\cos(1/n)} = \mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}.}$$

*Et il n'était évidemment pas question de « passer l'équivalent à l'exponentielle »...*

# 3 Image injective d'une famille libre

**Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective et $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre de $E$, alors $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une famille libre de $F$. ($E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels)**

Sous les hypothèses de l'énoncé, partons d'une combinaison linéaire nulle des $u(e_i)$ et montrons qu'elle est triviale (si vous faites autre chose en partant autrement ou en arrivant ailleurs, vous n'aurez pas montré la liberté).

On fixe donc des $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$ et on va montrer que les $\lambda_i$ sont nuls.

Par linéarité, on a $u\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0 = u(0)$ donc par injectivité de $u$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ (on aurait aussi pu parler du noyau de $u$ qui est réduit à 0). Mais la liberté de $(e_1, ..., e_n)$ nous assure que les $\lambda_i$ sont nuls, ce qu'on souhaitait démontrer.

$\boxed{\text{L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est bien libre.}}$

# 4 Complexes

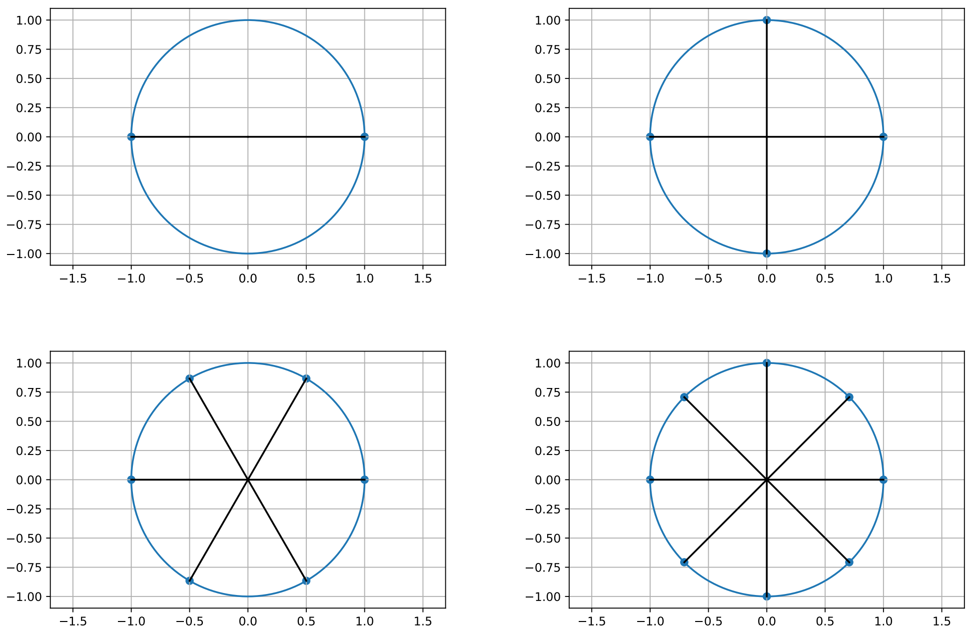
**Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les complexes $z$ vérifiant $z^{2n} = 1$ sont ceux de la forme $\mathrm{e}^{ik\pi/n}$, avec $k$ décrivant $[\![0, 2n-1]\!]$**

Il s'agit de montrer que $E_1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ z^{2n} = 1\}$ est égal à l'ensemble $E_2 = \{\mathrm{e}^{ik\pi/n} \,|\, k \in [\![0, 2n-1]\!]\}$. Si vous n'avez pas compris qu'il s'agissait de montrer l'égalité de deux ensembles (ou une équivalence), vous n'avez pas compris la question : ce doit être retravaillé.

Et il n'est *évidemment* pas question de travailler par équivalence.

- L'inclusion $E_2 \subset E_1$ est une simple vérification : si $z \in E_2$ alors il existe $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{ik\pi/n}$, et on a alors $z^{2n} = \mathrm{e}^{2ik\pi} = 1$, donc $z \in E_1$.
- Réciproquement : si $z \in E_1$, on l'écrit $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ (en cherchant la preuve au brouillon vous avez probablement écrit $\theta \in \mathbb{R}$ dans un premier temps, avant de réaliser en fin de preuve que pour localiser $k$, il était pratique de localiser $\theta$ dans l'intervalle suffisant $[0, 2\pi[$...).
  On a $\rho^{2n}\mathrm{e}^{2ni\theta} = 1$, donc en observant le module on a $\rho^{2n} = 1$, ce qui impose (puisque $\rho$ est un réel positif) : $\rho = 1$. On obtient ensuite $\mathrm{e}^{2ni\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2n\theta = 2k\pi$.
  *Bien entendu personne n'aura écrit un charabia à base de $\mathrm{e}^{2ni\theta} = \mathrm{e}^{2ik\pi}$ pour tout $k$ donc... donc quoi ? Donc $2n\theta = 2k\pi$ par identification bien entendu ! Ce qu'on utilise c'est le fait que les seuls réels $\varphi$ vérifiant $\mathrm{e}^{i\varphi} = 1$ sont ceux de la forme $2k\pi$ avec $k$ entier.*
  Bref, $z = \mathrm{e}^{ik\pi/n}$, et il reste à localiser $k = \frac{n\theta}{\pi}$, ce qu'on obtient facilement grâce à l'encadrement $0 \leqslant \theta < 2\pi$ qui fournit $0 \leqslant k < 2n$ et permet de conclure puisque $k$ est entier.

Bonus : les ensembles en question pour $n \in \{2, 4, 6, 8\}$ !



## 5 Une décomposition en éléments simples

**Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ :** $F = \dfrac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)}\cdot$

La fraction a un degré strictement négatif (sans quoi il aurait fallu commencer par une division euclidienne), donc le théorème de décomposition en éléments simples nous assure l'existence de coefficients réels tels que :

$$F = \frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{cX+d}{X^2+2}\cdot$$

**Il est évidement hors de question** de mettre tout ceci sous même dénominateur **et de procéder à je ne sais quelles identifications, concept à manipuler avec la plus grande prudence... en tout cas cette année**. Par contre considérer la fraction $(X-1)F$ (sous ses deux formes) puis évaluer en 1 chacune des formes (et il n'est aucunement question de faire tendre $X$ vers 1 !) fournit :

$$((X-1)F)(1) = a = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}\cdot$$

*(On aura noté l'importance des parenthèses autour de $(X-1)F$...)*
De même :

$$((X+2)F)(-2) = b = \frac{7}{-3 \times 6} = -\frac{7}{18}\cdot$$

On passe ensuite par $\mathbb{C}$ pour déterminer deux réels en même temps (par identification des parties réelles et imaginaires) :

$$\left((X^2+2)F\right)(\sqrt{2}i) = c\sqrt{2}i + d = \frac{-1-\sqrt{2}i}{(\sqrt{2}i-1)(\sqrt{2}i+2)} = \frac{-1-\sqrt{2}i}{-4+\sqrt{2}i} = \frac{1}{18}(-1-\sqrt{2}i)(-4-\sqrt{2}i) = \frac{1}{9} + \frac{5\sqrt{2}}{18}i,$$

donc $c = \dfrac{5}{18}$ et $d = \dfrac{1}{9}$ et finalement :

$$\boxed{\frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)} = \frac{1/9}{X-1} - \frac{7/18}{X+2} + \frac{\frac{5}{18}X + \frac{1}{9}}{X^2+2}\cdot}$$

*Pour me rassurer j'ai fait deux petites vérifications peu coûteuses : que vaut $F(0)$ ? Et quelle est la limite de $tF(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$ ? « D'une part... et d'autre part... ». Puis une dernière vérification encore moins coûteuse :*