Suites, séries et calculs en algèbre linéaire

À rendre le mardi 24 septembre 2024 dernier délai.

1 Suites et séries

1. Étudier la suite de premier terme $u_0 = -\pi$, et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\cos(u_n) + \frac{1}{4}.$$

   Cet exercice ne sera pas corrigé si vous ne suivez pas ce plan :
   — *étude préliminaire conduisant à un graphe relativement précis de « la fonction en jeu » (disons f) ainsi que de l'escalier usuel ;*
   — *tel intervalle est stable par f ;*
   — *tous les u_n sont dans tel intervalle pour telle raison ;*
   — *la suite converge pour telle raison ;*
   — *la limite vérifie telle relation pour telle raison ;*
   — *la limite vérifie telles inégalités pour telle raison, donc vaut...*

2. Après avoir décomposé en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ et justifié la convergence de la série, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

2 Calculs en algèbre linéaire

1. Des systèmes linéaires.
   (Après des calculs propres on présentera clairement l'ensemble des solutions.)

   (a) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

   (b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases} -x + (1+\lambda)y = -4-\mu \\ 2x - \lambda y = 9+\mu \end{cases}$$

2. Absolument rien à voir...

   (a) Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de $B = \begin{pmatrix} -1 & 1+\lambda \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$.

3. Toujours rien à voir : calculer le déterminant des matrices A et B.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer sous forme factorisée le déterminant des matrices $\lambda I_3 - C$ et $\lambda I_3 - D$, avec $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   Vous n'avez jamais inversé une matrice seul, ou autrement qu'en bricolant ? Il est temps d'apprendre... vous pouvez par exemple résoudre formellement $MX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ en ne faisant rien d'autre que du pivot. Normalement ce système sera éuivalent à $X = NY$ pour une certaine matrice N, et il restera à conclure.

6. On travaille ici dans $E = \mathbb{R}^4$; on pose $f_1 = (1, 2, 3, 4)$, $f_2 = (-1, 2, -3, 4)$, et $f_3 = (4, 3, 2, 1)$.
   (a) Montrer que $H = \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est un hyperplan de E.
   (b) En donner une équation, c'est-à-dire une forme linéaire dont H est le noyau.
   On pourra par exemple s'intéresser au rang de la famille $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t)$ un vecteur générique : à quelle condition (sur ce rang) $\overrightarrow{v}$ est-il dans H ?
   (c) Donner un supplémentaire de H.
   (d) Donner une/des condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) simple(s) sur (x, y, z, t) pour avoir $\overrightarrow{f} = (x, y, z, t) \in \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$.
   On pourra à nouveau raisonner sur le rang de $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f}\right)$.
   (e) On définit $\overrightarrow{g} = (-1, -5, 7, -5)$. Donner une base de $\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \text{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g})$.

7. Dans $F = \mathbb{R}^5$, donner un supplémentaire du sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   On pourra pivoter sur les colonnes jusqu'à obtenir un système échelonné puis interpréter géométriquement le résultat avant d'aller plus loin.

8. Dans $G = \mathbb{R}_4[X]$, on considère les quatre polynômes $P_1 = 1 + X + X^2 + 2X^3$, $P_2 = 1 + 2X^2 + X^3 - X^4$, $P_3 = X - X^2 + X^3 + X^4$ et $P_4 = 1 + 2X - 3X^3 + X^4$. Extraire de (P_1, P_2, P_3, P_4) une famille libre maximale, puis compléter cette famille libre en une base de G.