Khôlles : quinzaine numéro 1

Du 16 au 27 septembre 2024

Le début de l'année étant consacré à de la réalphabétisation, il n'y a presque rien dans le cours, au moins pour la première semaine. Petits rappels :

— On prendra particulièrement garde à distinguer u_n, (u_n), $\sum u_n$, $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n\right)_N$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

— Pas plus que moi[1] les élèves ne sont censés savoir ce qu'est la série de terme général u_n mais ils doivent savoir qu'elle se note $\sum u_n$, que ce n'est PAS la suite (u_n), et ce que signifie « $\sum u_n$ converge ». Ici, les séries ne sont jamais croissantes ou majorées (puisqu'on ne sait pas ce que c'est) : elles ont juste le droit d'être convergentes ou divergentes.

1 Première semaine

— Pratique des développements limités.

— Suites réelles : révisions de première année. Khôlleurs, merci de donner une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (allez, avec f croissante...) dans chaque trinôme : $u_{n+1} = \sin u_n$ avec $u_0 \in [0, \pi/2]$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{10} \cdots$

— $u_{n+1} = au_{n+1} + bu_n$.

— Si pour tout n on a $0 < u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, 1[$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Séries de réels : essentiellement des rappels de première année, avec les définitions (convergence, somme partielle, restes), la convergence des séries géométriques et de Riemann.

— (u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

2 Deuxième semaine (en plus)

— Théorèmes de comparaison (à une série convergente à termes positifs).

— Les comparaisons à une intégrale se font toujours à la main, sans théorème particulier, et forcément avec un dessin avec des vrais rectangles significatifs.

— Convergence absolue (qui entraîne la convergencetoutcourt)

— « Règle de d'Alembert » (ne pas en abuser, merci...).

— Séries alternées : convergence et contrôle du reste.

— Produit de Cauchy ; cas de l'absolue convergence.

3 Questions de cours

Pour la première semaine :

— Unicité de la limite.

— Si une suite est convergente, alors ele est bornée.

— Convergence des séries géométriques.

— Convergence des séries de Riemann.

— Si pour tout n on a $0 < u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, 1[$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour la deuxième semaine, ajouter :

— Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.

— Si $u_n = O(v_n)$ avec $0 \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ converge (absolument).

1. Ennemis : c'est ce document que vous pouvez envoyer à l'inspection générale pour briser ma carrière !

— Règle de d'Alembert (que je pratique peu mais qui est une bonne question de cours).
— Si une série réelle est absolument convergente, alors elle est convergente.
— Exponentielle d'une somme de complexes.
— Séries alternées : convergence, et contrôle du reste.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : de l'algèbre linéaire (de première année, essentiellement).