Suites, séries et calculs en algèbre linéaire

1 Suites et séries

1. On va bien entendu étudier l'application

$$f : x \mapsto x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cdot$$

Tout d'abord, $f'(x) = 1 \underbrace{-\frac{1}{2}\underbrace{\sin x}_{\leqslant 1}}_{\geqslant -1/2} \geqslant 1 - \frac{1}{2} > 0$, donc f est (strictement) croissante. Ensuite, le signe de $f(x) - x$ est celui de $\cos x + \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$f(x) = x \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pm 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

et par ailleurs :

$$f(x) \geqslant x \iff \cos x \geqslant -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [-2\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi]$$

Sur $[-2\pi, 0]$ par exemple, $f(x) - x$ est nul en $-4\pi/3$ et $-2\pi/3$, négatif entre ces deux valeurs, et positif en dehors de $[-4\pi/3, -2\pi/3]$.
Ceci nous permet de représenter le graphe de f au voisinage de $-\pi$, et l'escalier usuel partant de $u_0 = -\pi$:

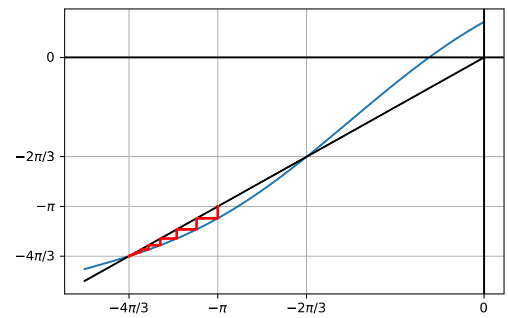

FIGURE 1 – L'escalier usuel

Nous voila convaincus que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-4\pi}{3}\cdot$$

Déroulons les arguments usuels :
— Puisque f est croissante, $-4\pi/3 \leqslant x \leqslant -2\pi/3$ implique $-4\pi/3 = f(-4\pi/3) \leqslant f(x) \leqslant f(-2\pi/3) = -2\pi/3$, autrement dit : $I = [-4\pi/3, -2\pi/3]$ est stable par f.
— Puisque u_0 appartient à l'intervalle I qui est stable par f, on a également $u_1 = f(u_0)$ qui appartient à I, et par récurrence immédiate, tous les u_n sont dans I. Enfin... comme c'est la première fois, rédigeons ! On note donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n \in I$ ».

— $u_0 \in I$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
— Si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un n fixé, on a $u_n \in I$, or I est stable par f, donc $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \in I$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$, et termine la récurrence.

— Pour $x \in I$, on a $f(x) \leqslant x$, donc d'après le point précédent, on a pour tout n : $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $-4\pi/3$, donc est convergente ; notons ℓ sa limite.

— La continuité de f en ℓ nous assure que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Mais par ailleurs, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite). La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ nous assure alors (unicité de la limite) : $\ell = f(\ell)$, donc ℓ est de la forme $\pm 2\pi/3 + 2k\pi$.

— L'inégalité $-4\pi/3 \leqslant u_n \leqslant u_0 = -\pi$ (celle de droite venant de la décroissance de u) passée à la limite nous assure : $-4\pi/3 \leqslant \ell \leqslant -\pi$.

— Sur $[-4\pi/3, -\pi]$, le seul réel point fixe de f est $-4\pi/3$, qui est donc la limite de u.

Comme annoncé plus haut :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-4\pi}{3}\cdot}$$

2. Pour la décomposition en éléments simples, on commence par écrire la forme a priori :

$$F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$

On évalue ensuite $XF = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)} = a + b\dfrac{X}{X+1} + c\dfrac{X}{X+2}$ en 0 pour trouver d'une part a et d'autre part $\frac{1}{2}$; etc.

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}\cdot}$$

Ensuite : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^3}\cdot$ La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est notoirement convergente $(3 > 1)$, donc par comparaison de séries *à termes positifs* :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ est convergente.}}$$

Pour $N \geqslant 1$, on va collisionner :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{N+2}\frac{1}{k}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right),
\end{aligned}$$

et on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\cdot}$$

Si vous avez collisionné avec des petits points, ça me va aussi.

2 Calculs en algèbre linéaire

1. (a) Tentons une méthode originale en pivotant... Les opérations élémentaires sont celles imposées par le pivot : aucune fantaisie n'est acceptée ! Par exemple à la première étape on réalise les

opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.
J'insiste sur le fait que si vous faites autre chose, ce n'est pas « un point de vue différent » : c'est une méconnaissance du pivot de Gauss. Et probablement pas à la marge.
Pour la deuxième étape on a le choix entre $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{5}L_2$ et $L_4 \leftarrow 5L_4 - L_2$: c'est cette deuxième option que j'ai prise.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ \quad - 5y - 8z - 10t = 9 \\ \quad - 5y - 5z - 4t = 3 \\ \quad - y - 2z - 2t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ \quad - 5y - 8z - 10t = 9 \\ \quad\quad 3z + 6t = -6 \\ \quad\quad - 2z = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 - 2y - 3z - 3t = 1 \\ y = -\dfrac{1}{5}(9 + 8z + 10t) = -1 \\ t = \dfrac{1}{6}(-6 - 3z) = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

(La dernière étape s'écrit et se lit de haut en bas.)
Et ainsi, ce système possède une unique solution :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1, -1, 2, -2)\}}$$

(b) Et si on pivotait ?

$$\begin{cases} -x + (1+\lambda)y = -4 - \mu \\ 2x - \lambda y = 9 + \mu \end{cases} \iff \begin{cases} -x + (1+\lambda)y = -4 - \mu \\ \quad (2+\lambda)y = 1 - \mu \end{cases}$$

Discutons :

i. Si $\lambda \neq -2$, on a un brave système triangulaire, qui possède pour unique solution :

$$\begin{cases} x = (1+\lambda)y + 4 + \mu = \cdots = \dfrac{9 + 5\lambda + \mu}{2 + \lambda} \\ y = \dfrac{1-\mu}{2+\lambda} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{9 + 5\lambda + \mu}{2 + \lambda}, \frac{1-\mu}{2+\lambda} \right) \right\}}$$

ii. Si $\lambda = -2$: la seconde équation est : $0 = 1 - \mu$. Ainsi :
- Si $\mu \neq 1$, alors le système ne possède pas de solution.
- Si $\mu = 1$, le système est équivalent à la simple équation $-x - y = -5$. Il possède donc une infinité de solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(5 - y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.}$$

2. (a) Pour que la copie ne soit pas déchirée, on va bien entendu pivoter : les opérations sont les mêmes que pour la résolution du système de la première question, et conservent le rang :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 4}$$

Avec un peu de recul, la résolution du premier système nous donnait directement ce résultat...

(b) L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ nous dit que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1+\lambda \\ 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$ donc :

— Si $\lambda = -2$ alors B est de rang 1.

— Si $\lambda \neq -2$ alors B est de rang 2.

3. Pour A on pivote comme on l'a déjà vu deux fois, sachant que dès qu'une colonne ne possède qu'une seule valeur non nulle, on développe par rapport à cette colonne, ce qui nous ramène à la dimension inférieure :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & -10 \\ -5 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -5 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-5)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

À la troisième étape on a réalisé l'opération $L_3 \leftarrow 5L_3 - L_1$ qui multiplie le déterminant par 5, d'où le facteur $1/5$ puisque $\det(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{5}\det(L_1, L_2, 5L_3) = \frac{1}{5}\det(L_1, L_2, 5L_3 - L_1)$.

$$\boxed{\det(A) = -12}$$

4. Pour le premier déterminant, on développe bien entendu par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(\lambda I_3 - C) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\underbrace{\big((\lambda-2)(\lambda+1)+3\big)}_{=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)}$$

$$\boxed{\det(\lambda I_3 - C) = \lambda(\lambda-1)^2}$$

Pour le deuxième j'ai tout de suite développé par rapport à la première colonne. On aurait aussi pu faire une étape de pivot en se reposant sur le -1 en position $(1,3)$: $C_1 \leftarrow C_1 + (\lambda-2)C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - 3C_3$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - D) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -1 \\ 0 & \lambda+4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\underbrace{\big((\lambda+4)(\lambda-5)+24\big)}_{=\lambda^2-\lambda+4} - 4\underbrace{\big(-6+(\lambda+4)\big)}_{=\lambda-2} \\ &= (\lambda-2)\underbrace{\big((\lambda^2-\lambda+4)-4\big)}_{=\lambda^2-\lambda} = (\lambda-2)\lambda(\lambda-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\det(\lambda I_3 - D) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

5. On procède comme suggéré dans l'énoncé.
Ceux adeptes d'une méthode magique, qu'ils l'aient comprises ou non, sont habilités à l'utiliser !
Résolvons donc $MX = Y$... en pivotant et sans la moindre fantaisie :

$$MX = Y \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = y_2 \\ -x_1 + 4x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 + y_1 \\ -2x_2 - x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4y_1 + 8y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - x_3 = -y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

(Ici encore la dernière étpe se réalise du bas vers le haut.)
On obtient donc quelque chose comme $MX = Y \iff X = NY$, et comme Y était quelconque, on a prouvé pour le même prix :

$$\boxed{M \text{ est inversible, d'inverse } M^{-1} = N = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

6. (a) Il suffit de vérifier que $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est de rang 3 :

$$\dim(H) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -10 \\ 4 & 8 & -15 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

(on a choisi de pivoter sur les colonnes, mais on aurait pu tout aussi bien choisir les lignes ; on a par ailleurs fait des dilatations de colonnes pour y voir plus clair). Ainsi, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 :

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^4.}$$

(b) Un vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ si et seulement si le rang de la famille $\mathcal{G} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{v})$ vaut 3. Or, en adaptant le calcul précédent :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{G}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & -3 & 2 & z \\ 4 & 4 & 1 & t \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & y-2x \\ 3 & 0 & -2 & z-3x \\ 4 & 2 & -3 & t-4x \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & z-3x \\ 4 & 2 & -1 & t-2y \end{pmatrix}$$

Ce rang vaut 3 si et seulement si $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z-3x \\ t-2y \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $2(t-2y) = z-3x$: on tient notre condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{v}$ soit dans H.

$$\boxed{H \text{ est le noyau de la forme linéaire } \varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto -3x + 4y + z - 2t.}$$

(c) $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, 0)$ n'est pas dans H (il n'est pas dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$), donc $\mathbb{R}e_1$ constituera un supplémentaire pour H (intersection et dimensions...).

$$\boxed{\text{La droite engendrée par } (1, 0, 0, 0) \text{ constitue un supplémentaire de } H.}$$

(d) $\overrightarrow{f} = (x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ si et seulement si $\mathcal{H} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f}\right)$ est de rang 2. On calcule donc le rang par opérations élémentaires :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{H}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \\ 4 & 4 & t \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & y-2x \\ 3 & 0 & z-3x \\ 4 & 2 & t-4x \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & z-3x \\ 4 & 2 & t-2y \end{pmatrix}$$

ce rang vaut 2 si et seulement si $z - 3x = 0$ et $t - 2y = 0$.

$$\boxed{(x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \text{ si et seulement si } 3x = z \text{ et } 2y = t.}$$

On note que $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ vérifient effectivement ces conditions ! C'est rassurant...

(e) Les habitants de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g})$ sont les éléments de E qui s'écrivent sous la forme $\alpha\overrightarrow{f_3} + \beta\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 4\alpha - \beta \\ 3\alpha - 5\beta \\ 2\alpha + 7\beta \\ \alpha - 5\beta \end{pmatrix}$ tout en respectant les équations de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ établies à la question précédente, ce qui revient ici (faire les calculs !) à $\alpha = \beta$. On a donc :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_3} + \overrightarrow{g}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

7. On pivote sur les colonnes de la matrice représentant initialement les trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$. À chaque étape, les colonnes représentent encore (dans la base canonique de

$\mathbb{R}^5$) une famille génératrice de l'espace engendré par les trois vecteurs initiaux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit alors [1] après ces deux étapes que le troisième vecteur était combinaison linéaire des deux précédents, et que pour trouver une base de $\mathbb{R}^5$, il suffit de compléter les deux premiers par $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$ (éléments usuels de la base canonique ; on a alors une matrice triangulaire).

$$\boxed{\text{Un supplémentaire du sous-espace proposé est } \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}).}$$

8. Même principe que dans la question précédente : on représente les polynômes dans la base canonique, et on pivote sur les colonnes. On continue donc de représenter des combinaisons linéaires de ces vecteurs dans la base canonique.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après deux étapes, on voit que P_3 est combinaison linéaire de P_1 et P_2, que (P_1, P_2, P_4) est libre (et constitue donc une base de $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$, soit encore une famille libre maximale) et peut être complétée en une base de E en ajoutant X^2 et X^4.

$$\boxed{(P_1, P_2, P_4) \text{ est une sous-famille libre maximale de } \mathcal{F}, \text{ et } (X^2, X^4) \text{ la complète en une base de } G.}$$

1. Si on a bien compris le sens des opérations élémentaires : que représentent les différentes colonnes ?