Nilpotents en petite dimension

À rendre le mardi 1er octobre 2024 dernier délai.

E désigne ici un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et on s'intéresse aux endomorphismes nilpotents de E, c'est-à-dire aux $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si p est le plus petit entier strictement positif tel que $u^p = 0$ (on dit alors que p l'indice de nilpotence de u), alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\big(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre. Que peut-on en déduire sur p ?
2. Montrer que si p est l'indice de nipotence de u, alors $\mathrm{Im}\,(u^{p-1})$ est un sous-espace de $\mathrm{Ker}\, u$ qui n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
3. *On suppose ici que E est de dimension* 2 et que $u \in \mathcal{L}(E)$ est non-nul et nilpotent. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On pourra prendre un vecteur en dehors du noyau, ainsi que son image par u...
4. *On suppose ici que E est de dimension* 3 et que $u \in \mathcal{L}(E)$ est non-nul et nilpotent.
   (a) Montrer que l'ordre de nilpotence de u vaut 2 ou 3.
   (b) On suppose ici que l'ordre de nilpotence est 2. Montrer que $\mathrm{Im}\, u$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}\, u$. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On pourra choisir un vecteur en dehors du noyau, considérer son image par u, et prendre un dernier vecteur dans le noyau mais pas dans l'image !
   (c) On suppose ici que l'ordre de nilpotence de u est 3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer qu'il n'existe pas $v \in \mathcal{L}(E)$ et deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E telles que $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{E}) = N_1$ et $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}) = N_2$.
5. *On suppose cette fois que E est de dimension* 4, et on considère les matrices :
$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) *(Facile)* Calculer le rang et l'indice de nilpotence de chacune de ces matrices.
   (b) Montrer qu'il ne peut exister $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant pour matrice N_1 dans une base et N_2 dans une autre.
   (c) De même, montrer que si $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, il ne peut exister $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant pour matrice N_i dans une base et N_j dans une autre.
   (d) *(Question difficile et optionnelle)* Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est l'une des quatre matrices N_i vues plus haut.
6. *On termine par les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.*
   (a) Montrer que les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables, c'est-à-dire, au choix :

— il existe $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$;

— si on note u l'endomorphisme (de $\mathbb{R}^5$) canoniquement associé à A, alors il existe une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de u est B.

(b) Exhiber 6 matrices nilpotentes non nulles de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dont on montrera qu'elles ne sont pas semblables.