Algèbre linéaire - rappels et compléments

1 Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1 – *Mines 2022 [5/10] - Hugo D.*
Soient p, q, r trois projecteurs d'un espace de dimension finie. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur.

1. Montrer que la trace d'un projecteur est un entier.
2. Montrer que $q = r = 0$.

Exercice 2 – *À savoir faire les yeux bandés ; CCP 2016 [2/10]*
Soit E un espace vectoriel. Déterminer les endomorphismes de E tels que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
On pourra, dans un premier temps, supposer E de dimension finie et travailler dans une base.

Exercice 3 – *Mines 2010 (MP) [3/10]*
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace de E si et seulement si $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Exercice 4 – *CCP 2008 (MP) [5/10]*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,g$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$.

Exercice 5 – *X 2010 (PC) [3/10]*
Soient E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Im}\,(u)$ si et seulement si $u \circ u = 0$ et $\dim(E) = 2\mathrm{rg}(u)$.

Exercice 6 – *CCP 2007 [4/10]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f) = E$, alors $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.
2. Montrer que si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$, alors $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.

Exercice 7 – *Mines 2010 (PC) [7/10]*
Soient E un espace vectoriel de dimension n, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f+g = \mathrm{Id}_E$, avec $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \leqslant n$.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(g) = E$, puis que f et g sont des projecteurs.

Exercice 8 – *CCP 2015 [7/10]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose f nilpotente d'ordre n.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\big(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.
2. Que vaut $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$?
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, ..., f^{n-1})$.

Exercice 9 – *Centrale 2015 [7/10]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, ainsi que $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est un entier pair.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10 – *ENSAM 2017 [5/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n.$$

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que f possède un polynôme annulateur de degré 2 ; en déduire f^{-1}.

Exercice 11 – *Mines 2010 (PC), TPE 2016 (PSI) [6/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M + (\mathrm{tr} M)A = B$?

Exercice 12 – *CCP 2016 [3/10]*
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (non nuls).
Déterminer le rang de $M = X\,Y^{\mathrm{T}}$.

Exercice 13 – *X 2016 PC [3/10]*
Soient E et F deux espaces de dimension finie, $x \in E$ et $y \in F$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u(x) = y$.

Exercice 14 – *[4/10]*
Soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_1', ..., f_n')$ ets de rang au moins $n - 1$.
Donner un exemple où ce rang vaut $n - 1$, et un autre où il vaut n.

Exercice 15 – *[4/10]*
Soient p et q deux projecteurs qui commutent. Montrer : $\mathrm{Ker}\,(p + q) = \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(q)$.

2 Polynômes, fractions rationnelles

Exercice 16 – *ENSEA 2023 [3/10] - Zacharie S.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer de deux façons différentes que $X^2 - X + 1$ divise $X^{2n} - (X - 1)^n$.

Exercice 17 – *Mines 2022 [6/10] - Côme L.*
Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = & 1 \end{cases}$

Exercice 18 – *Mines 2010 (polynômes de Hilbert) [7/10]*
On définit $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

1. (question que j'ai ajoutée) Exprimer $H_{15}(20)$ à l'aide d'un coefficient binomial. Même chose pour $H_{15}(-10)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(p) \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $P(p) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Il existe $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_n H_n$.

Exercice 19 – *Polynômes de Tchebychev [7/10]*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n, U_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ et $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta U_n(\cos\theta)$. Montrer que ces polynômes sont (à n fixé !) uniques.
2. Donner les premiers T_n et U_n, ainsi que le terme dominant de T_n et U_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Factoriser T_n et U_n en produit d'irréductibles.

Exercice 20 – *TPE 2015 [3/10]*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto Q - XR$, avec Q et R le quotient et le reste de $P(X^2)$ par $A_n = 1 + X + \cdots + X^n$.

1. Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de Φ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 21 – *Centrale 2013 [6/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est nilpotent.
2. En déduire :
$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0.$$

3 Calcul matriciel

Exercice 22 – *CCP 2012 (MP) [4/10]*
Soit $B = \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^n.
2. Soient (u_n) et (v_n) vérifiant $\begin{cases} u_{n+1} = -16u_n - 28v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 10v_n \end{cases}$
   Exprimer u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0.

Exercice 23 – *Mines 2010 (PC) [4/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Exercice 24 – *TPE 2016 [6/10]*
Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

1. (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel. Donner sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathcal{T}$ est stable par produit.
2. Soit $T \in \mathcal{T}$ inversible.
   (a) Montrer que $\psi : M \mapsto MT$ est un endomorphisme de $\mathcal{T}$.
   (b) Caractériser le noyau de ψ et donner le rang de ψ.
   (c) Justifier que $T^{-1} \in \mathcal{T}$.

Exercice 25 – *TPE 2014 [6/10]*
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la valeur de x.
2. Déterminer deux matrices A et B qui conviennent.

Exercice 26 – *Télécom sud Paris 2012 [5/10]*

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & (0) \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{pmatrix}$

Exercice 27 – *Mines 2010 [4/10]*
Soit $A = Diag(1,2,1)$. Calculer le déterminant de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto AM + MA$.

Exercice 28 – *Mines 2017 [5/10]*
On définit, pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) & \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & x & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est dérivable, et calculer D_n'.
2. En déduire la valeur de D_n.

4 Quelques calculs effectifs

Exercice 29 – *Pivotons... [4/10]*

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues (x, y) :

$$\begin{cases} -x + (1+\lambda)y = -4 - \mu \\ 2x - \lambda y = 9 + \mu \end{cases}$$

3. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ le système suivant possède-t-il une unique solution ?

$$\begin{cases} x + \lambda y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ \lambda x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 30 – *Rangs [4/10]*
Donner le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31 – *Inverses [4/10]*
Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 – *Réduction du rang [6/10]*
Pour chacune des matrices A_i, exhiber P_i et Q_i inversibles telles que $P_iA_iQ_i = J_{r_i}$. On mettra si possible en œuvre la méthode géométrique et la méthode par opérations élémentaires (pour ceux qui connaissent !) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 – *Complétons [7/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ représenté par A dans la base canonique de E.

1. Trouver une base du noyau de u ; compléter pour avoir une base de E.
2. Trouver une base de l'image de u ; compléter pour avoir une base de E.
3. Recommencer avec cette fois $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ représentant $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$.

Exercice 34 – *Équation d'un hyperplan [4/10]*
« Trouver une équation d'un hyperplan » consiste à donner une forme linéaire dont il est le noyau. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $H = \text{Vect}(e_1, e_2)$ (avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique) est le noyau de $(x, y, z) \mapsto x$: « H a pour équation $x = 0$ dans la base canonique ».

1. On suppose que $(f_1, ..., f_{n-1})$ est une famille libre dont on connaît les coordonnées dans une basse $\mathcal{E}$. Expliquer comment obtenir une équation de H dans $\mathcal{E}$ en pivotant sur les colonnes d'une matrice (n, n) bien choisie.
2. Trouver une équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1, 2)$.
3. Trouver une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, 3)$ et $(4, 5, 6)$.

Exercice 35 – *Un peu de complexité [4/10]*
Évaluer la complexité des différents pivots pour les algorithmes mis en œuvre dans les exercices précédents.
Il s'agit d'évaluer (à la louche) le nombre de sommes/produits effectués dans le cas de matrices (n, n) (on se fiche des constantes : est-ce plutôt du 2^n, n^2, n^4, $n!$?)

Exercice 36 – *Une matrice jordanisée [4/10]*
On s'intéresse à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & \\ & & 0 & 3 & & & \\ & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(il y a des 0 partout ailleurs).

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_7$ n'est pas inversible.
   On note $\mathrm{Sp}(A)$ *l'ensemble de ces valeurs.*
3. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, déterminer $\mathrm{rg}(A - \lambda I_7)$.
4. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, déterminer $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)$, ainsi que $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^2$, etc.

5 Posés en colle

Exercice 37 – *L. Mermet 2023-2024 [3/10]*
Soient A et B deux sev de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer :

$$f(A) \subset f(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A + \mathrm{Ker}\,(f) \subset B + \mathrm{Ker}\,(f)$$

Exercice 38 – *L. Mermet 2023-2024 [2/10]*

1. Montrer que $V = \{x \mapsto \mathrm{e}^x P(x) \,|\, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner sa dimension.
2. Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V, et calculer son déterminant.

Exercice 39 – *L. Mermet 2023-2024 [5/10]*
Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}\,(q) \subset \mathrm{Ker}\, p$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Déterminer l'image et le noyau de r.

Exercice 40 – *C. Stérin 2023-2024 [5/10]*
Soient p et q deux projecteurs. Montrer :

$$\mathrm{Ker}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p = p \circ q \;\text{ et }\; q = q \circ p)$$

Exercice 41 – *P. Bel 2023/2024 [8/10]*
Soit n un entier $\geqslant 2$.

1. Déterminer les racines de $P_n = (X+1)^n - X^n$.
2. Que vaut $\prod_{i=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$?

Exercice 42 – *L. Mermet 2023/2024 [2/10]*
Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto f - g$ est linéaire de $F \times G$ dans E.
2. Déterminer son image et son noyau.
3. En déduire le théorème de Grassmann sur $\dim(F + G)$.

6 Des indications (et même un peu mieux)

Exercice 1 – Dans une base adaptée : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) \in \mathbb{N}$. Ensuite, en notant $p_1, q_1, r_1, s_1 \in \mathbb{N}$ les rangs des quatre projecteurs en jeu ($s = p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$), on a par linéarité de la trace puis mise au carré : $(s_1 - p_1 - q_1\sqrt{2})^2 = 3s_1$. En développant : si q_1 était non nul alors $\sqrt{2}$ serait rationnel, ce que vous savez prouver faux ! On en déduit de façon symétrique que $r_1 = 0$ (au fait, vous savez montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel ?)

Exercice 2 – Il s'agit évidemment de montrer que les endomorphismes ayant cette propriété sont exactement les homothéties. Dans un sens, c'est trivial. Réciproquement, on suppose la propriété vérifiée, et en dimension finie, on peut regarder la matrice de u dans une base. Elle est d'abord diagonale (regarder $u(e_1)$), puis scalaire (regarder $u(e_1 + e_2)$). En dimension infinie, on a tout d'abord pour tout $x \neq 0$ l'existence de $\lambda(x)$ tel que $u(x) = \lambda(x)x$. Pour montrer que $\lambda(x)$ de dépend pas de x, on fixe x et y distincts, et on observe $u(x + y)$. Il y aura lieu de distinguer selon que (x, y) est libre ou non.

Exercice 3 – Pour le sens non trivial, par la contraposée : si $E_1 \not\subset E_2$ et $E_2 \not\subset E_1$, cela nous fournit deux habitants de $E_1 \cup E_2$ dont la somme aura bien du mal à être dans E_1 comme dans E_2.

Exercice 4 – Pour les deux premiers points, une inclusion est systématique, l'autre se faisant en composant avec f. Pour les supplémentaires, analyse/synthèse pour prouver que chaque $x \in E$ se décompose de façon unique selon $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$. Attention, il n'y a pas d'argument dimensionnel !

Exercice 5 – Déjà, $u \circ u = 0$ est équivalent à : $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$. Il n'y a plus grand chose à faire...

Exercice 6 – Une inclusion systématique, et l'autre... locale. Ensuite, une inclusion, et les dimensions via le théorème du rang. Bonus : donner des contre-exemples en dimension infinie.

Exercice 7 – Grassmanniser sur $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$, qui contient $\mathrm{Im}\,(f + g)$... puis regarder par exemple les matrices dans une base adaptée aux supplémentaires.

Exercice 8 – Ralala, si seulement on avait déjà rencontré cette situation une ou deux dizaines de fois dans le passé, ça pourrait nous aider... Pour l'inclusion non triviale du dernier point, on peut raisonner matriciellement (c'était probablement le point de vue privilégié par celui qui a posé l'exo) en calculant soigneusement les matrices FG et GF lorsque F est comme on imagine et G quelconque. Mais on peut aussi travailler par analyse-synthèse, en supposant $f \circ g = g \circ f$: si $g = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$, alors en évaluant en x_0 on voit que les α_k sont nécessairement les coordonnées de $g(x_0)$ dans une certaine base. Réciproquement...

Exercice 9 – Le déterminant de $f \circ g = -g \circ f$ impose : $(-1)^n \det f \det g = \det f \det g$, or f et g sont des symétries, donc bijectives, donc $(-1)^n = 1$, d'où la parité de n. Ensuite, si on construit une base de E en concaténant des bases de $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$, la matrice de f dans cette base est de la forme voulue, mais pas celle de g a priori. Ceci dit, un calcul par bloc nous montre (via la relation $f \circ g = -g \circ f$) que $g(E_1) \subset E_2$, et qu'il y a même égalité (injectivité et dimensions). Finalement, on peut reprendre notre base de E_1 et la concaténer avec son image par g : cela fournira une base de E qui devrait être assez favorable !
Joli exo, je trouve (à l'exception du premier argument, laid).

Exercice 10 – Il me semble que $f^2(M) = ... = (n + 2)f(M) - nM$. On regarde ensuite droit dans les yeux la relation $f^2 - (n + 2)f = -n\mathrm{Id}$, et on factorise f à gauche... Les amateurs d'endomorphismes de rang 1 auront plutôt considéré $f - \mathrm{Id}$...

Exercice 11 – Considérer $\Phi : M \mapsto M + (\mathrm{tr}M)A$. Quelqu'un dans son noyau est forcément de la forme λA ; mais $\Phi(A) = (1 + \mathrm{tr}(A))A$, donc si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, alors Φ est bijective. Sinon, le noyau est une droite, donc l'image est un hyperplan, et la condition nécessaire d'existence $\mathrm{tr}(B) = 0$ donne une inclusion de l'image dans un hyperplan donc l'égalité...

Exercice 12 – Toutes les colonnes sont colinéaires, et il y en a au moins une non nulle, donc le rang vaut 1.

Exercice 13 – Si $x = 0$, il est nécessaire et suffisant que $y = 0$; et si $x \neq 0$, alors en complétant la famille libre (x) en une base $(x, e_2, ..., e_n)$, il existe une (unique) application envoyant x sur y et les e_k sur 0...
L'équation $ax = b$, ça continue de vous faire lever les yeux au ciel ?

Exercice 14 – Théorème du rang pour $f \mapsto f'$ sur l'espace engendré par les f_i.

Exercice 15 – Une inclusion est claire. Pour l'autre, on fixe un vecteur où on pense, et on lui applique p ou q en agitant les termes et les bras.

Exercice 16 – D'une part $a^n - b^n = ...$ dans tout anneau commutatif.
D'autre part les racines de $X^2 - X + 1$ se calculent facilement et se visualisent bien sur le cercle trigonométrique, de sorte qu'on voit presque immédiatement qu'elles sont racines de $X^{2n} - (X-1)^n$.

Exercice 17 – On ne travaille évidemment pas par équivalence. Dans l'analyse, je serais tenté de considérer le polynôme $(X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - sX^2 + tX - p$ avec $s = x+y+z = 1$, $t = xy+xz+yz$ qui se calcule en considérant s^2 (et on obtient $s = -10$) puis en multipliant la troisième équation du système par xyz on trouve $p = t = -10$, donc $(X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - X^2 - 10X + 10 = (X-1)(X^2-10) = (X-1)(X-\sqrt{10})(X+\sqrt{10})$, ce qui impose (à l'ordre près) x, y et z.
La synthèse ne pose guère de problème.

Exercice 18 – Distinguer trois cas : $0 \leqslant p < n$, $p < 0$ et $p \geqslant n$. Pour montrer que les λ_i sont entiers, évaluer en 0, puis 1...

Exercice 19 – Unicité à faire soigneusement (les $\cos\theta$ décrivent une infinité de valeurs, fournissant une infinité de racines à la différence de deux candidats solution). Pour l'existence : récurrence double, ou bien récurrence simple en traitant en parallèle les T_n et U_n, ou encore calcul direct via $\mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n$.

Exercice 20 – $\deg(Q) \leqslant n$ et $\deg(R) < n$. Pas envie de calculer $\Phi_3(X^2)$ et $\Phi_3(X^3)$, mais ça ne doit pas être trop difficile !

Exercice 21 – Si $P \neq 0$, alors $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$ (on peut aussi regarder la matrice de Δ dans la base canonique). Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $\Delta^n(P) = 0$; on écrit alors $\Delta = (\Delta + \mathrm{Id}) - \mathrm{Id}$ et on binomise... dans $\mathcal{L}(E)$ entre endomorphismes qui commutent.

Exercice 22 – $B^2 = -3B - 2I_2$, donc $X^2 + 3X + 2 = (X+2)(X+1)$ est un polynôme annulateur de B...

Exercice 23 – Le carré d'une matrice de rang 1 est connu...

Exercice 24 – On exhibe facilement une base constituée de $1 + 2 + \cdots + n$ matrices élémentaires. Pour l'avant dernière question, je prouve l'injectivité de ψ (donc sa surjectivité !) en utilisant $M \mapsto MT^{-1}$... c'est-à-dire la dernière question !

Exercice 25 – Un exo original ! Le rang de AB vaut au plus 2 ; mais c'est aussi celui de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & x+2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, donc $x = 13$. Ensuite, on choisit A dont les colonnes forment une base de l'image, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis on ajuste B pour obtenir les bonnes combinaisons linéaires de colonnes...

Exercice 26 – $D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n$, et $X^2 - (a+b)X + ab$ n'est pas trop compliqué à factoriser (et pitié, pas de racinedebécarrémoinsquatreassez : a et b sont complexes).

Exercice 27 – Pffff je regarderais éventuellement ce qui se passe sur la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$...

Exercice 28 – $(\det(C_1(x), ...C_n(x)))' = \det(C_1'(x), C_2(x), ..., C_n(x)) + \cdots + \det(C_1(x), ..., C_{n-1}(x), C_n'(x))$...
Finalement, $D_n' = D_{n-1}$, puis $D_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\cdot$

Exercice 29 – Le premier est de Cramer : $\mathcal{S}_1 = \{(1,-1,2,-2)\}$. Pour le deuxième, il faut discuter. Les solutions du troisième constituent un plan : $\mathcal{S}_3 = \left\{\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}z-t, -\frac{7}{3}+\frac{5}{3}z, z, t\right) \;\Big|\; z,t\in\mathbb{R}\right\}$. Enfin, les λ fournissant une unique solution au troisième système sont les racines de $\lambda^2+5\lambda-1=0$.

Exercice 30 – $3,2,1,3,3$, et pour la dernière, il faut discuter.

Exercice 31 – Les inverses respectives sont :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 3 & -2\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

La dernière n'est pas inversible !

Exercice 32 – Attention, il n'y a pas unicité !

$$P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4/3 & -5/3 & 1\end{pmatrix}, Q_5 = \begin{pmatrix}-1 & 1/3 & -1/4 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/3 & 5/4 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & -3/4 & -2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comme A_1 est inversible, on aurait pu prendre $P_1 = A_1^{-1}$ et $Q_1 = R_1 = I_2$...
On aura noté que si on pivote de façon ordonnée, sans bricolage, alors on obtient « souvent » des matrices triangulaires. Si ce n'est pas le cas, c'est parce qu'on a dû échanger deux lignes pour avoir un pivot...

Exercice 33 – En pivotant sur les colonnes , on voit que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$, qu'on peut compléter avec e_4 pour faire une base. De même, $\mathcal{F} = (v(e_1), v(e_2), v(e_4))$ constitue une base de $\mathrm{Im}\,(v)$ (le pivot nous dit que $v(e_3)\in \mathrm{Vect}\,(v(e_1), v(e_2))$), et on peut compléter $\mathcal{F}$ avec (f_3, f_5) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$ (on a alors une famille échelonnée).

Exercice 34 – On construit $M = \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{Mat}}(f_1, ..., f_{n-1}, v)$, avec $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et on pivote sur les colonnes de M jusqu'à obtenir une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\lambda_1 & (0) & 0\\ & \ddots & \vdots\\ & \lambda_{n-1} & 0\\ (*) & & \varphi(x_1, ..., x_n)\end{pmatrix}$ qui a le même rang que M. Or $v\in H$ si et seulement si M est de rang $n-1$: une équation de H dans $\mathcal{E}$ est donc : $\varphi(x_1, ..., x_n) = 0$. Applications : $y-2x=0$, et $x+2y-z=0$ (d'un point de vue euclidien c'est très clair d'ailleurs, n'est-il pas ?)

Exercice 35 – Quand on résout un système (n,n), il y a la mise sous forme triangulaire, constituée de n étapes. Pour chacune, on réalise n opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ (ainsi éventuellement qu'un échange de ligne en cas de pivot défaillant). Il y a de l'ordre de n opérations élémentaires par opération sur une ligne, soit finalement un coût de l'ordre de n^3 additions/multiplications dans $\mathbb{K}$ pour mettre sous forme triangulaire. La dernière phase est elle d'un coût quadratique. En gros, tous les autres algorithmes à base de pivot ont un coût cubique !

Exercice 36 – A est inversible ; son spectre vaut $\{2,3,-1\}$.

Exercice 37 – Je dirais bien : par double implication ? Encéphalogramme presque plat.

Exercice 38 – Je calculerais bien sa matrice sur une base privilégiée.

Exercice 39 – Je calculerais bien $r \circ r$ en utilisant $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, mais aussi $p \circ q = 0$ puisque $\text{Im}\,(q) \subset \text{Ker}\, p$. Ensuite, $\text{Im}\,(r) \subset \text{Im}\,(p) + \text{Im}\,(q)$ et $\text{Ker}\,(r) \supset \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$. Ce sont en fait des égalités (les autres inclusions sont plus fines).
On pouvait aussi travailler matriciellement par bloc, dans une base adaptée à $\text{Im}\,(q)$, $\text{Ker}\,(p)$ et $\text{Im}\,(p)$.

Exercice 40 – Pour le sens direct : si $\text{Ker}\,(p) = \text{Ker}\,(q)$ alors p et $p \circ q$ coïncident que les sous-espaces supplémentaires $\text{Ker}\,(q)$ et $\text{Im}\,(q)$ donc sont égaux (même chose pour $q = q \circ p$).
Réciproquement, si $p = p \circ q$ et $g = g \circ p$ alors $\text{Ker}\,(q) \subset \text{Ker}\,(p)$ et $\text{Ker}\,(p) \subset \text{Ker}\,(q)$.

Exercice 41 – Les racines sont les $z_k = \dfrac{\mathrm{e}^{-ik\pi/n}}{2i\sin(k\pi/n)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et leur produit connu en regardant les coefficients de P_n fournit $\prod_{i=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 42 – L'image est $F + G$ et le noyau est isomorphe à $F \cap G$...