Réduction des endomorphismes… *et des matrices*

« On note 2 le cardinal de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; c'est le cardinal de tout ensemble à deux éléments dont les éléments sont différents. » – N. Bourbaki

Table des matières

1 Préliminaires **2**
1.1 Retour sur les projections et symétries . . . 2
1.2 Objectifs . . . 3
1.3 Premiers résultats . . . 3
1.4 Polynômes d'endomorphismes . . . 4
1.5 « Réduction de matrices » . . . 5

2 Réduction à la main **6**
2.1 Spectre évident . . . 6
2.2 Petit rang, gros noyau . . . 7

3 Des outils professionnels **7**
3.1 Polynôme caractéristique . . . 7
3.2 Une condition nécessaire simple . . . 9
3.3 Une condition suffisante simple . . . 9
3.4 Deux CNS portant sur les dimensions . . . 9
3.5 Une CNS portant sur des polynômes annulateurs . . . 10
3.6 Trigonalisation . . . 10

4 Applications diverses **10**
4.1 Suites récurrentes linéaires . . . 11
4.2 Systèmes différentiels linéaires . . . 12
4.3 Commutant . . . 12
4.4 Équations polynomiales . . . 13

1 Préliminaires

1.1 Retour sur les projections et symétries

Parler de « la projection sur un sous-espace » n'a aucun sens.

Vous ne comprenez pas cette remarque ? Alors ne passez surtout pas à la suite : rappelez ce que désigne une telle projection, dans votre esprit. Attention : si par paresse vous passez cette étape, vous allez passer à la suite et dans 5 minutes ce sera trop tard, et la compréhension des projections sera encore repoussée de quelques mois (ou plus probablement : *ad vitam æternam...*).

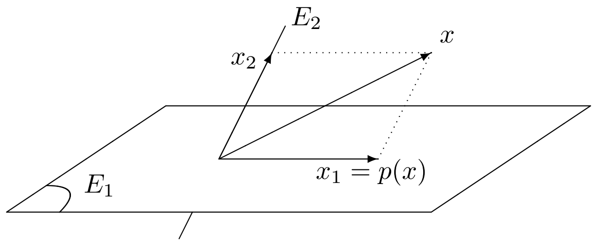

FIGURE 1 – $E = E_1 \oplus E_2$

Quelques rappels :

— Si $E_1 \oplus E_2 = E$, alors la projection p sur E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$, avec de plus $\mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\,(p) = E_1$, et $\mathrm{Ker}\,(p) = E_2$.

— Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ u = u$, alors $F_1 := \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $F_2 := \mathrm{Ker}\,(u)$ sont supplémentaires, et u est la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

— Je sais que malgré le préliminaire vous avez lu ces rappels sans avoir réfléchi vous-même à ce qu'est une réflexion : c'est mal !

Une traduction matricielle du fait que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u)$ soient supplémentaires est : si on concatène des bases de ces deux sous-espaces, on trouve une base de l'espace ambiant, dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{Diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ (écriture par blocs).

Une autre famille d'applications vérifie ce type de propriétés :

— Si $E_1 \oplus E_2 = E$, alors la symétrie u par rapport à E_1 parallèlement à (dans la direction) E_2 est un endomorphisme de E qui vérifie $u \circ u = \mathrm{Id}_E$, avec $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = E_1$, et $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = E_2$.

— Réciproquement, si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $v \circ v = \mathrm{Id}_E$, alors $F_1 := \mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{Id}_E)$ et $F_2 := \mathrm{Ker}\,(v + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires, et v est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2.

Une traduction matricielle du fait que $\mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(v + \mathrm{Id}_E)$ soient supplémentaires est : si on concatène des bases de ces deux sous-espaces, on trouve une base de l'espace ambiant, dans laquelle la matrice de v est $\mathrm{Diag}(1, ..., 1, -1, ..., -1) = \begin{pmatrix} I_p & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

Exercice 1. *Avec les notations précédentes, dire rapidement (én réfléchissant, pas en essayant de vous souvenir) ce que valent les restrictions* $p|_{E_1}$, $p|_{E_2}$, $s|_{E_1}$, $s|_{E_2}$.

Exercice 2. *Soient* $E = \mathbb{R}^2$ *et* u *la rotation d'angle* $\pi/2$. *Faire un dessin, donner la matrice de* u *dans la base canonique de* E, *et montrer qu'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de* u *soit diagonale.*

1.2 Objectifs

Diagonaliser un endomorphisme consiste, quand c'est possible, à trouver une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

DÉFINITION 1 — *Diagonalisabilité*

En dimension finie, un endomorphisme de E est dit **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

REMARQUE : Cela est équivalent au fait qu'il existe des sous-espaces $V_1, ..., V_k$ tels que $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, avec $u|_{V_i}$ qui est une homothétie $x \mapsto \lambda_i x$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. On a alors $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$, avec p_i la projection sur V_i selon la décomposition précédente. C'est d'ailleurs ainsi qu'on définit la diagonalisabilité **en dimension infinie**.

DÉFINITION 2 — *Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres*

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **valeur propre** de u tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective. Les **vecteurs propres** associés à la valeur propre λ sont alors les vecteurs $x \in E$ **non nuls** tels que $u(x) = \lambda x$. Le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ est $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
On note *souvent* ce sous-espace $E_\lambda(u)$, ou E_λ si cela ne prête pas à confusion.
Le **spectre** de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

REMARQUES :
- Ainsi, $\overrightarrow{0}$ est dans tous les sous-espace propres... mais n'est pas vecteur propre. C'est ainsi ; inutile de grogner.
- Supposons : $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Les λ_i sont alors clairement (?) des valeurs propres. Mais réciproquement, si λ est une valeur propre, alors $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective, donc $\mathrm{Mat}(u - \lambda \mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = \mathrm{Diag}(\lambda_1 - \lambda, ..., \lambda_n - \lambda)$ est non inversible, donc λ est l'une des valeurs diagonales λ_i.
  Trouver le spectre d'une matrice diagonale ne donnera donc jamais lieu à de sordides calculs. BIEN ENTENDU... et ceci reste valable pour les matrices triangulaires.

EXEMPLES : Une projection (respectivement une symétrie) non triviale est diagonalisable. Ses valeurs propres sont 1 et 0 (respectivement 1 et -1). Avec une grande finesse dans le choix d'une base, on doit également pouvoir prouver que les homothéties $x \mapsto \lambda x$ sont diagonalisables.

REMARQUE : Il est parfois (souvent) préférable d'« avoir des λ_i distincts ». Plutôt que $\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on préfère alors réordonner la base, pour se ramener à une matrice écrite par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_k I_{n_k} \end{pmatrix}$, avec $n_1 + \cdots + n_k = n$ et les μ_i **distincts deux à deux**.

Exercice 3. *Soit u un endomorphisme nilpotent. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-il diagonalisable ?*

1.3 Premiers résultats

Exercice 4. *Montrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes, alors E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe.*

Exercice 5. *Montrer que si λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois valeurs propres distinctes, alors E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} sont en somme directe.*

Et sans surprise...

THÉORÈME 1 — *Sous-espaces propres en somme directe*

Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres distinctes pour un endomorphisme, alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe.

PREUVE : Par récurrence, ou « à la Vandermonde » (ou avec de l'interpolation de Lagrange, ce qui est essentiellement la même chose !). ■

Exercice 6. *Montrer que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme donné... est libre.*

La somme est directe, certes, mais... vaut-elle l'espace ambiant ?

Proposition 1 — Diagonalisabilité et sous-espaces propres

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre :
- u est diagonalisable ;
- la somme des sous-espaces propres vaut E.

*B*ref :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

Preuve : Aussi élémentaire (mais à détailler) qu'essentielle... ■

Calculer l'ensemble des endomorphismes commutant avec $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé est une activité classique, qui utilise à haute dose le résultat suivant :

Proposition 2 — Endomorphismes qui commutent et sous-espaces propres

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Preuve : Syntaxique ; left to the reader. ■

1.4 Polynômes d'endomorphismes

On a vu avec les projections et symétries qu'une information « polynomiale » sur u permettait de reconstruire des résultats géométriques. Il s'agit de poser le formalisme pour cela. Pour rappel :

Définition 3 — *Polynômes d'endomorphisme*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit alors :

$$P(u) := a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + \cdots + a_ku^k,$$

avec $u^i = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{i \text{ fois}}$.

Tout se passe alors au mieux... comme le fait suivant le résume de façon snob :

Fait : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $P \mapsto P(u)$ réalise un morphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ vers $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$, i.e. : $(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Preuve : C'est à nouveau essentiellement syntaxique ; left to the reader. Le seul point auquel il faut faire attention est le passage du produit (pour les polynômes) à la composition (pour les endomorphismes) : on parle de $u \circ v$ ou $P(u) \circ P(v)$ mais jamais de $u \times v$ ou $P(u) \times P(v)$. ■

Concrètement, cela donne un « cadre légal » à toute manipulation raisonnable... qu'on faisait d'ailleurs avant sans états d'âme. C'est bien entendu la même chose avec les matrices.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On constate que $A^2 - A - 2I_3 = 0$. Posant $P = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, on effectue ensuite la division euclidienne $X^n = Q_nP + \alpha_nX + \beta_n$, avec $2^n = 2\alpha_n + \beta_n$ et $(-1)^n = -\alpha_n + \beta_n$, donc $\alpha_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $\beta_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, puis en « évaluant en A » :

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}I_3.$$

Remarque : Le seul point auquel il faut faire attention est l'homogénéité de ce qu'on écrit : bien écrire $\alpha_0 I_n$, et non α_0 quand on évalue $\sum \alpha_k X^k$ en une matrice. Attention aussi au fait que pour des matrices $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$ (produit matriciel) alors que pour des endomorphismes (encore une fois) : $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ (composition).

Diverses propriétés (faciles à vérifier) sont à connaître, et à savoir prouver les yeux fermés.

Proposition 3 — Des sous-espaces stables par u

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors Ker $(P(u))$ et Im $(P(u))$ sont stables par u.

Preuve : Left to the reader. ■

Proposition 4 — Des endomorphismes qui commutent

Si $u = P(v)$, avec $v \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $u \circ v = v \circ u$.

Preuve : Pfff... ■

1.5 « Réduction de matrices »

Définition 4 — *Diagonalisation/réduction de matrices*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, **diagonaliser** A consiste à (tenter de) diagonaliser l'endomorphisme canoniquement associé à A. On parle de même des valeurs propres, vecteurs propres et spectre d'une matrice.

On travaille donc dans $\mathbb{K}^n$, en notant en colonnes les vecteurs. La traduction matricielle de « il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale » est : « il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale ».

Exemple : Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est de rang 1, donc la dimension du noyau (de l'application linéaire u canoniquement associée) vaut 2. On trouve facilement une base du noyau : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont de bons candidats. Par ailleurs, en notant $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AC = 3C$, ce qui nous donne un vecteur pour obtenir une base de diagonalisation de u. En notant $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}$ la base diagonalisation, $P = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{F}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(1, 1, 3)$, on a alors :

- si on retranscrit en une seule fois les trois relations $AC_i = \lambda C_i$: $AP = PD$;
- si on applique le théorème de changement de base pour les endomorphismes : $D = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = P^{-1}AP$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow[A]{u} & \mathcal{E} \\ Id_E \big\uparrow P & & Id_E \big\downarrow P^{-1} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow[D]{u} & \mathcal{F} \end{array}$$

On a bien $P^{-1}AP$ diagonale, et c'est gagné.

Remarque : D'une manière générale, si A est de rang 1, alors pour chaque colonne $C \neq 0$ de A, on a AC dans l'image de A, donc colinéaire à C : C est donc un vecteur propre.

Exemple : La matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vue avec nos réels yeux, est celle de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Il est clair que cette rotation n'a pas de vecteurs propres, donc R n'est pas diagonalisable.

Exemple : La complexe matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie, en notant $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$: $RC_1 = -iC_1$ et $RC_2 = iC_2$, et donc en posant $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$: $R = PDP^{-1}$, donc R est diagonalisable « sur $\mathbb{C}$ ».

Ainsi, il faut parfois faire attention au corps sur lequel on doit réduire la matrice.

Définition 5 — *Matrices semblables (rappel !)*

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** (sur $\mathbb{K}$) lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Cela signifie que A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$... dans deux bases différentes.

Exercice 7. *Les matrices suivantes sont-elles semblables ?*

— $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

— $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

— $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Réduire une matrice A revient finalement à chercher une matrice la plus simple possible (idéalement : diagonale) semblable à A. Mais pour cela, les applications linéaires sont indispensables. Les zapper n'est pas une bonne idée.

On n'écrira jamais [1] : « Dans telle base, la matrice A est diagonale » [2].

Le résultat suivant n'est pas un résultat de cours, mais est classique... sans être évident.

Proposition 5 — Similitude sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

> Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$ (au sens : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$).
> Elles sont alors semblables sur $\mathbb{R}$ (au sens... maintenant clair).

Preuve : On écrit $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La relation $(P_1 + iP_2)B = A(P_1 + iP_2)$ fournit $P_1B = AP_1$ et $P_2B = AP_2$. C'est gagné si P_1 ou P_2 est inversible. Sinon, il suffit de considérer les combinaisons $M_t = P_1 + tP_2$, avec $t \in \mathbb{R}$: on a toujours $M_tB = AM_t$, mais est-ce que l'une des matrices M_t est inversible ?. Pour le savoir, considérons $\varphi : t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$: φ est une application polynomiale non nulle sur $\mathbb{C}$ (puisque $\varphi(i) \neq 0$), donc non nulle sur $\mathbb{R}$ (elle possède un nombre fini de racines sur $\mathbb{C}$ donc également sur $\mathbb{R}$), donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) \neq 0$, et c'est gagné. ∎

2 Réduction à la main

Sans les outils plus ou moins élaborés qui vont suivre dans ce chapitre, on peut déjà diagonaliser à la main certains endomorphismes. On rappelle que la réduction d'une matrice est essentiellement celle de son application canoniquement associée, donc on commence en général par fixer les éléments géométriques : « Soit u l'application canoniquement associée à A ; il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$; ... »
On cherche ensuite à savoir si oui ou non on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_e)$.

2.1 Spectre évident

Si M est triangulaire, on sait qu'elle est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont non nuls. Maintenant, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, $A - \lambda I_n$ est non inversible (i.e. : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$) si et seulement si λ est l'un des éléments diagonaux de A.
Fait : Le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur la diagonale.

Exercice 8. *Montrer que* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable et que* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ne l'est pas.*

Exercice 9. *Expliciter* P *telle que* $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P$ *soit diagonale.*

1. Sauf à vouloir faire une bonne blague, à l'effet assuré.
2. J'ai été assez lourd ? Parions que non, malheureusement.

2.2 Petit rang, gros noyau

Si le rang est petit, alors le noyau est grand, ce qui nous fournit une valeur propre (0) dont le sous-espace associé est grand...

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ a pour rang 1, et en prenant $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AC = nC$.

Ainsi, il existe une base (clair ?) de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à A vaut $\mathrm{Diag}(0, ..., 0, n)$.

Remarque : Quitte à ajouter I_n (ou quelque chose d'approchant), on traite de la même façon les matrices du genre $\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix} = A - I_n$, $\begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix} = aA$, ou encore $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} = bA + (a-b)I_n$...

D'une manière générale, si on sait réduire A alors on sait réduire $A + \alpha I_n$. Ajouter un certain nombre de fois I_n est donc parfois un préliminaire intéressant pour arranger la tête d'une matrice.

Exercice 10. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{tr}(M)A$ est diagonalisable.*

Pour les endomorphismes de rang 1, on peut construire une base adaptée à la fois à l'image et au noyau... mais il faut alors savoir si on est dans la situation $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$, ou bien $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u)$. On prouve alors :

Proposition 6 — Endomorphismes de rang 1 : diagonalisabilité

Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Tout ceci sera réexpliqué maintes foi dans des exercices (et l'a déjà été en fait !), mais faites déjà l'effort de comprendre des choses au premier passage !

3 Des outils professionnels

On a déjà vu que certaines matrices n'étaient pas diagonalisables. Il y a essentiellement deux raisons de nature très différentes :

- une matrice réelle peut avoir des valeurs propres « complexes non réelles » (ce qui pose problème lorsqu'on est dans $\mathbb{R}$: voir les rotations) ;
- les sous-espaces propres peuvent être « trop petits » : leur somme ne remplit pas l'espace ; c'est le cas des nilpotents, qui possèdent comme unique valeur propre 0, mais qui sont « rarement » diagonalisables...

On va commencer par présenter un outil (le polynôme caractéristique) qui sera parfois pratique pour déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme. Il donnera même ensuite une condition *suffisante* simple de diagonalisabilité. Il donnera également une condition nécessaire et suffisante, mais un peu plus complexe. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dira enfin que c'est un polynôme annulateur de la matrice (ce qui peut être pratique dans un certain nombre de situations).

3.1 Polynôme caractéristique

Définition 6 — *Polynôme caractéristique*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$ est polynomiale. Le polynôme associé (unique car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est le **polynôme caractéristique** de u, noté χ_u.

Remarques :

- Le polynôme χ_u est unitaire, de degré $\dim(E)$.
- On [3] choisit parfois de noter $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Le polynôme caractéristique est alors toujours de degré n, mais de coefficient dominant $(-1)^n$. Grâce à cette convention, le taux d'erreurs de signe passe à environ 30% dans les calculs (contre environ 30% avec l'autre convention).
- On définit bien entendu de la même façon le polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

3. Dont des tas de gens très respectables.

— Si on veut s'abstraire[4] de la désagréable condition sur $\mathbb{K}$, on peut directement définir $\chi_u := \det(XI_n - A)$, avec A la matrice représentant u dans une base donnée : ce calcul de déterminant a lieu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$, et le résultat ne dépend pas de la base choisie... *Vous n'avez pas compris la phrase précédente ? Ce n'est pas grave : je m'adressais surtout à ma bonne conscience !*

Exercice 11. *Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale. D'abord sous forme factorisée, puis développée : que vaut le coefficient constant ? Et le coefficient de X^{n-1} ?*

Exercice 12. *Montrer qu'en dimension n, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent est X^n.*

Notons dès maintenant que par définition des valeurs propres, on a le résultat suivant :

Proposition 7 — Valeurs propres et polynôme caractéristique

> Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique.

Une valeur propre de matrice, peut être racine **multiple** du polynôme caractéristique.

Définition 7 — *Multiplicité d'une valeur propre*

> Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, sa **multiplicité** est sa multiplicité comme racine de χ_u.

Exemples :

— La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et 5, de multiplicités respectives 2 et 1.
— Si en dimension n un endomorphisme possède n valeurs propres distinctes, alors elles sont forcément de multiplicité 1 : pourquoi ?
— Si un endomorphisme est diagonalisable, la multiplicité d'une valeur propre est la dimension du sous-espace propre associé : pourquoi ?
— « À l'opposé », pour un nilpotent, la multiplicité de l'unique valeur propre 0 vaut n, alors que la dimension du sous-espace propre associé (i.e. : le noyau du nilpotent) peut être très petite (réduite à 1 ; donner un exemple !).

On verra plus tard qu'il y a des liens entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Exercice 13. *Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres de la matrice T vue plus haut ? Cette matrice est-elle diagonalisable ?*

Exercice 14. *Calculer χ_u puis $\chi_u(u)$ lorsque u est diagonalisable.*

Vous savez quoi ? Ce n'est pas un hasard.

Théorème 2 — *Cayley-Hamilton*

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a alors $\chi_u(u) = 0$.

Preuve (hors programme) : Une façon élégante d'opérer est de prouver le résultat dans un cas simple (disons sur $\mathbb{C}$, dans le cas de n valeurs propres distinctes), puis de généraliser à tous les endomorphismes (toujours sur $\mathbb{C}$), avec des argument analytiques (densité de telle classe de matrices). Le résultat sur $\mathbb{R}$ est alors acquis. On peut même passer à un corps quelconque (avec cette fois des arguments algébriques un peu plus fins). Il y a aussi des preuves magiques... qu'on s'empressera de poubelliser. ■

Terminons par ce dernier résultat, qui est un peu plus qu'un exercice classique !

Proposition 8 — Polynôme caractéristique d'une restriction

> Si E_1 est un sous-espace de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors le polynôme caractéristique de la restriction de u à E_1 divise celui de u.

Preuve : Travailler dans une base adaptée au problème ; on est alors ramené à un déterminant de matrice « triangulaire par blocs ». ■

4. Et c'est par exemple indispensable sur les corps finis, qui existent dans la vraie vie !

Une conséquence importante :

PROPOSITION 9 — Multiplicité vs. dimension du sous-espace propre

Si λ est une valeur propre de multiplicité m, alors $\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)) \leqslant m$.

PREUVE : Appliquer la proposition précédente au sous-espace stable $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et travailler un peu. ■

3.2 Une condition nécessaire simple

Il s'agit d'un résultat élémentaire, mais crucial :

PROPOSITION 10 — Une condition nécessaire de diagonalisabilité

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il est nécessaire que son polynôme caractéristique soit scindé.

Exercice 15. *Montrer que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.*

3.3 Une condition suffisante simple

On sait que les sous-espaces propres sont en somme directe ; s'il y en a assez, c'est gagné !

THÉORÈME 3 — *Une condition suffisante de diagonalisabilité*

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes avec $n = \dim(E)$, alors u est diagonalisable.

PREUVE : Il suffit de prendre une famille de vecteurs propres : elle est libre, et a le bon cardinal. ■

Exercice 16. *Montrer que cette condition suffisante n'est pas nécessaire !*

3.4 Deux CNS portant sur les dimensions

Exercice 17. *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ? Et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *?*

Quand il n'y a pas assez de valeurs propres, il faut que les sous-espaces propres aient la bonne dimension !

THÉORÈME 4 — *Diagonalisabilité et dimension des sous-espaces propres*

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si la dimension de E est égale à la somme des dimensions des sous-espaces propres.

PREUVE : Deux sens à faire... Aucun n'est difficile, mais il faut les écrire ! ■

Une petite variation du résultat précédent :

THÉORÈME 5 — *Diagonalisabilité et dimension des sous-espaces propres*

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et pour toute valeur propre λ, la multiplicité de λ est égale à $\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E))$.

PREUVE : Le sens direct est évident. Pour la réciproque, il suffit de noter que la somme des multiplicité des racines vaut, pour un polynôme scindé, son degré, c'est-à-dire ici la dimension de l'espace. La somme (directe) des sous-espaces propre est donc assez grosse. ■

Exercice 18 (CCP 2007, 2008)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. *Quel est le rang de A ? A est-elle inversible ?*
2. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

3.5 Une CNS portant sur des polynômes annulateurs

On dispose d'une condition nécessaire et suffisante extrêmement simple et efficace :

THÉORÈME 6 — *Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité*

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Ce théorème est admis. Enfin, le sens non évident !

EXEMPLES :

- On peut repenser aux projections et symétries : $X^2 - X = X(X-1)$ et $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée que de 1, on a $A^2 = nA$...

REMARQUE : Pour que u soit diagonalisable, il SUFFIT donc que χ_u soit scindé à racines simples, mais ce n'est pas nécessaire (donner un contre-exemple).

Exercice 19 (CCP 2009 – PSI)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A + 8I_n$.*

1. *La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?*
2. *Trouver les $M \in \mathrm{Vect}\,(I_n, A)$ telles que $M^2 = 2M + 8I_n$.*

Exercice 20 (CCP 2010 – PC)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$. Déterminer les valeurs possibles pour la trace de f.*

Exercice 21. *Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.*

Cette condition est équivalente au fait que l'image n'est pas incluse dans le noyau ; donnez-en deux preuves !

3.6 Trigonalisation

Exercice 22. *Soient E un espace de dimension 4, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E, et $\mathcal{F} = (e_4, e_3, e_2, e_1)$. Comparer $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})$ et $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F})$.*

DÉFINITION 8 — *Endomorphismes/matrices trigonalisables*

Un *endomorphisme* est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de l'espace dans lequel sa matrice est triangulaire. Une *matrice* est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire (ou encore : son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable).

REMARQUE : Pour être trigonalisable, il est donc **nécessaire** d'avoir son polynôme caractéristique scindé, ce qui exclut par exemple une matrice telle que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (en tout cas sur $\mathbb{R}$). *On va voir que c'est encore plus simple !*

THÉORÈME 7 — *Une CNS pour être trigonalisable*

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

REMARQUES :

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est donc trigonalisable.
- Une étude fine des nilpotents permet de préciser nettement les choses. On obtient alors une forme réduite des trigonalisables portant beaucoup d'information : c'est la *réduction de Jordan*.

Le résultat suivant est très clair quand on trigonalise. Il reste cependant vrai sans trigonalisation. Il est énoncé pour une matrice, mais bien entendu le résultat se transpose aux endomorphismes.

PROPOSITION 11 — Tête du polynôme caractéristique

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

4 Applications diverses

Les deux applications explicitement au programme sont les suites récurrentes linéaires et les systèmes différentiels linéaires. Les autres sont seulement des applications classiques.

4.1 Suites récurrentes linéaires

Résoudre [5] $\begin{cases} u_{n+1} & = & 3u_n \\ v_{n+1} & = & -5v_n \end{cases}$ n'est guère compliqué. Ça se gâte pour un système à dépendances mutuelles tel que $\begin{cases} u_{n+1} & = & 17u_n & + & 60v_n \\ v_{n+1} & = & -5u_n & - & 18v_n \end{cases}$....

On traduit donc ce système en l'équation matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Si A est diagonale, c'est gagné. Sinon, on essaie de réduire A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$ avec D diagonale. On a alors en posant $Y_n = P^{-1}X_n$:

$$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}.AX_n = P^{-1}.PDP^{-1}X_n = DY_n,$$

d'où le calcul simple de Y_n puis de $X_n = PY_n$.

On aura noté qu'il n'est pas utile de calculer P^{-1} : elle n'est utile que dans la présentation théorique.

Exemple : Dans le cas vu plus haut, $A = \begin{pmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{pmatrix} = P.D.P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. En posant $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, on obtient donc $\begin{cases} x_{n+1} & = & 2x_n \\ y_{n+1} & = & -3y_n \end{cases}$, d'où $x_n = 2^n x_0$ et $y_n = (-3)^n y_0$. Il reste à écrire $X_n = PY_n$ pour obtenir l'existence de constantes [6] K_1 et K_2 telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_n & = & -4K_1 2^n - 3K_2(-3)^n \\ v_n & = & K_1 2^n + K_2(-3)^n \end{cases}$$

On pouvait aussi écrire $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta V_2$, avec V_1 et V_2 des vecteurs propres associés aux valeurs propres 2 et -3. On a alors :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \alpha A^n V_1 + \beta A^n V_2 = \alpha 2^n V_1 + \beta(-3)^n V_2...$$

Exercice 23. *Comment l'auteur de ce poly a-t-il engendré cette matrice A pourrie, mais finalement pas tant que ça ?*

Exercice 24. *Trouver les suites (u, v, w) vérifiant les relations de récurrence mutuelles*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} & = & -3u_n & - & 4v_n & + & 10w_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n & - & 5v_n & + & 10w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & - & 4v_n & + & 8w_n \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & -1 \\ w_0 & = & 2 \end{cases}$

Notons que si D n'est pas diagonale mais par exemple de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, le calcul de D^n donc de A^n (donc de $X_n = A^n X_0$) se fait assez bien également.

Exercice 25. *Trouver les suites (u, v) vérifiant les relations de récurrence mutuelle*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} & = & 3u_n & + & 2v_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n & - & v_n \end{cases}$$

5. Au sens : « trouver LES suites u et v telle que la relation de récurrence soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».
6. Les exprimer à l'aide de u_0 et v_0 ne présente que peu d'intérêt.

Remarques :

— Je ne suis pas (c'est le moins qu'on puisse dire...) fan de cette méthode de diagonalisation pour calculer finalement A^n : en pratique, le calcul de A^n en réalisant [7] la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur est presque toujours plus efficace [8]. M'enfin...

— On peut ramener l'étude des récurrences linéaires d'ordre p pour UNE suite d'éléments de $\mathbb{K}$ à celle d'une récurrence linéaire d'ordre 1, dans $\mathbb{K}^p$. Par exemple pour $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $X_{n+1} = AX_n$, etc...

4.2 Systèmes différentiels linéaires

Même principe que dans la section précédente : il s'agit de résoudre des systèmes différentiels linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = & ax(t) + by(t) \\ y'(t) = & cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on recherche. Si $b = c = 0$ (système diagonal), ce n'est guère compliqué...

Dans le cas général, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, de sorte que le système différentiel s'écrit $X' = AX$. On tente de diagonaliser A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$. On pose alors $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, de sorte que $X_1' = DX_1$, ce qui nous donne X_1 puis $X = PX_1$. Il est à nouveau inutile de calculer P^{-1}, et on peut noter que tout ceci se passe par équivalence : on a bien trouvé exactement LES solutions au problème initial.

Exemple : Résolvons le système différentiel $\begin{cases} x' & = & 17x & + & 60y \\ y' & = & -5x & - & 18y \end{cases}$ en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{pmatrix} = P.D.P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (ça n'a pas changé...). Le système $X' = AX$ est alors **équivalent**, en posant $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ à $X_1' = DX_1$, c'est-à-dire $x_1(t) = x_1(0)\mathrm{e}^{2t}$ et $y_1(t) = y_1(0)\mathrm{e}^{-3t}$, puis grâce à la relation $X = PX_1$:

$$\begin{cases} x' & = & 17x & + & 60y \\ y' & = & -5x & - & 18y \end{cases} \iff \exists K_1, K_2 \in \mathbb{R};\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) & = & -4K_1\mathrm{e}^{2t} - 3K_2\mathrm{e}^{-3t} \\ y(t) & = & K_1\mathrm{e}^{2t} + K_2\mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Autre point de vue ici encore : on écrit $X(t) = \alpha(t)V_1 + \beta(t)V_2$ (avec (V_1, V_2) notre base (constante) de vecteurs propres), de sorte que d'une part $X' = \alpha'V_1 + \beta'V_2$, mais d'autre part, $X' = AX = 2\alpha V_1 - 3\beta V_2$, donc (liberté) $\alpha' = 2\alpha$ et $\beta' = -3\beta$; etc.

Exercice 1 — *Centrale 2008 (extrait)*

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
2. Résoudre $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$

Si A n'est pas diagonalisable, ce n'est pas perdu pour autant !

Exercice 26 (CCP 2008). *Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.*

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Trigonaliser A.*
3. *Résoudre le système $\begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) - y(t) \end{cases}$*

7. Seul le reste nous intéresse.
8. Le gain par rapport à la première année est l'obtention rapide et mécanique d'un polynôme annulateur dans le cas général : le polynôme caractéristique.

4.3 Commutant

Exercice 27. *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux et M une matrice commutant avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Montrer que M est elle-même diagonale.*

On sait déjà que si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v (et vice-versa bien entendu). Pour trouver toutes les matrices B commutant avec A donnée, on raisonne géométriquement en notant u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B. On va supposer ici que A a le bon goût d'être diagonalisable.

— Analyse : si $AB = BA$ alors $u \circ v = v \circ u$, donc les sous-espaces propres de u sont stables par v.

— Synthèse : réciproquement, si les sous-espaces propres de u sont stables par v, alors sur chacun de ces sous-espaces propres, les restrictions de $u \circ v$ et de $v \circ u$ sont égales. Or ces sous-espaces sont supplémentaires, donc $u \circ v = v \circ u$ globalement.

Exemple : On cherche les matrices commutant avec notre vieille amie $A = \begin{pmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et v canoniquement associée à B : $AB = BA$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u$. Une condition nécessaire est que les sous-espaces propres de u soient stables par v, ce qui impose $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F})$ diagonale. Réciproquement, cette dernière condition nous assurera que effectivement $u \circ v = v \circ u$. Les matrices recherchées sont donc celles de la forme PD_1P^{-1}, avec D_1 diagonale et $P = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On aurait pu raisonner directement matriciellement :

$$AB = BA \iff P^{-1}ABP = P^{-1}BAP \iff P^{-1}AP.P^{-1}BP = P^{-1}BP.P^{-1}AP \iff D.P^{-1}BP = P^{-1}BP.D,$$

Donc B commute avec A si et seulement si $B' = P^{-1}BP$ commute avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, ce qui est équivalent par un calcul très simple à : B' diagonale. On retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 28. *Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec* $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Remarque : Si A n'est pas diagonalisable, on décompose en général l'espace en somme directe de sous-espaces stables par u : typiquement, les $\mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^k\right)$, avec k l'ordre de multiplicité de $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Ces sous-espaces sont stables par v. Comme à l'intérieur de ces sous-espaces, les sous-espaces propres de u sont également stables, ça réduit furieusement les possibilités pour v. On fait alors la synthèse.

Exercice 29. *Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec* $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4.4 Équations polynomiales

Exercice 30 (CCP 2010)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable à spectre simple (n valeurs propres distinctes). Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A^2 = M$? Même chose dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$...*

Une remarque toute bête mais essentielle : si $v = P(u)$, alors $u \circ v = v \circ u$, et donc les sous-espaces propres de v sont stables par u. Pour résoudre une équation d'inconnue $u \in \mathcal{L}(E)$ de la forme $P(u) = v$ (à $v \in \mathcal{L}(E)$ fixée), on réalise systématiquement une analyse-synthèse. Imaginons par exemple que v est diagonalisable, *avec des sous-espaces propres de dimension* 1, et $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ est une base de diagonalisation de v.

— Analyse : si u vérifie effectivement $P(u) = v$, alors (u et v commutent donc) les sous-espaces propres de v sont stables par u, donc ici, $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Si par ailleurs $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(\beta_1, ..., \beta_n)$, alors $P(u) = v$ si et seulement si $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

— Synthèse : réciproquement, si $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (avec les conditions polynomiales remplies entre les α_i et β_i), alors on a immédiatement $P(u) = v$.

Même pour les matrices, il est en général conseillé de travailler géométriquement : il faut commencer par introduire le matériel géométrique (espace, applications linéaires...)

Exemple : Pour l'exercice précédent : on note u et v les applications linéaires canoniquement associées à M et A. Il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

— si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe $\mu_1, ..., \mu_n$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k^2 = \lambda_k$. On prend alors v telle que $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}) = \mathrm{Diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$: $v^2 = u$, donc en observant cette relation depuis la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on trouve bien $A^2 = B$.
— si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que chacun des λ_i est positif, le raisonnement précédent s'applique.
— si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que l'un au moins des λ_i est strictement négatif : pour avoir $u^2 = v$, $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F})$ doit être diagonale et son carré doit être égal à $\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$: c'est impossible à cause du $\lambda_i < 0$: l'équation $A^2 = B$ n'a donc pas de solution.

Notons qu'ici dans le cas favorable (complexe) on pouvait facilement raisonner sans géométrie : « on a $M = PDP^{-1}$, et il suffit alors de prendre $A = PD'P^{-1}$ ». Mais dans le cas défavorable, il semble difficile de prouver la non-existence de A autrement que par une analyse nous fournissant des conditions nécessaires impossibles à tenir ; et ce sont essentiellement des arguments géométriques (« tel sous-espace est stable par telle application ») qui nous ont donné des conditions nécessaires : point de calculs sordides !

Exercice 31. *Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $B^2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.*

Si les sous-espaces propres ne sont pas des droites, ça complique la situation puisqu'on est amené à résoudre des équations de la forme $P(u) = \lambda \mathrm{Id}_E$, qui peuvent être en général plus compliquées. Enfin, si v n'est pas diagonalisable, tout n'est pas perdu !

Exercice 32 (X 2010 - PC)**.** *Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*