Samedi 5 octobre 2024 – calculatrices autorisées

1 Séries

1.1 Un développement limité

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \left(a \ln(n-1) + b \ln(n) + c \ln(n+1)\right)$$

soit convergente.
En cas de discussion (hum...) on rédigera avec le plus grand soin, et on donnera une conclusion claire avant de passer à la suite.

1.2 Produits infinis

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels de $]-1,1[$, et on note $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on désigne sa limite par $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$. Si de plus cette limite est non nulle, on dit que *le produit infini* $\prod(1+u_n)$ *converge.*

1. On suppose que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [0,1[$. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]-1,0]$.
   (a) Que peut-on dire de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $\sum u_n$ diverge ?
   (b) Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif si et seulement si $\sum u_n$ converge.
3. Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans les cas suivants :
   (a) $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)}$;
   (b) $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$;
   (c) $u_n = -\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
4. Dans cette question, on suppose seulement que la série $\sum u_n^2$ converge. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite non nulle si et seulement si $\sum u_n$ converge.
5. Que dire de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si la série $\sum u_n$ converge absolument ?
6. (a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.
   (b) Soit $x > 1$ et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1 = x$ et la relation de récurrence

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

   Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{1}{v_k}\right)$.
   On pourra commencer par justifier l'existence de $t_0 > 0$ *tel que* $v_1 = \mathrm{ch}(t_0)$.

7. Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. On pose $u_n = \tan^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

   On pourra commencer par montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1+\tan^2(x) = \frac{4\sin^2(x)}{\sin^2(2x)}$.

2 De la réduction sans le dire

2.1 Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Dans cette partie et la suivante, on s'intéresse à $A = \begin{pmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{pmatrix}$. Du point de vue géométrique, on va travailler dans $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ et u désigne l'endomorphisme de E canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}) = A$.

1. Montrer que $u - 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas injective. Plus précisément, on montrera que le noyau E_1 de $u - 2\mathrm{Id}_E$ est une droite, dirigée par un vecteur f_1 qu'on explicitera.
2. Montrer de même que $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u + 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_2)$, avec f_2 qu'on explicitera.
3. Montrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ est une base de E. Sans faire de produit matriciel, dire ce que vaut $D = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F})$.
4. Donner la valeur de P, la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
5. Exprimer D à l'aide de A et P, puis A à l'aide de D et P.
6. Calculer P^{-1}.

2.2 Quatre applications

On va utiliser ce qui précède pour obtenir une formule simple donnant la valeur de A^n, puis déterminer le commutant de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec A. Ensuite, on s'intéressera à deux « systèmes dynamiques », l'un continu et l'autre discret, dont les résolutions feront intervenir A et sa forme réduite.

1. *Calcul de A^n.*
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut D^n ?[1]
   (b) Exprimer A^n à l'aide de D^n.
   (c) Calculer A^n, au sens : $A^n = \begin{pmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$ (expliciter les quatre termes).
2. *Calcul du commutant de A.*
   Soient $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de E canoniquement associé à B.
   (a) Montrer que $AB = BA$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u$ (on distinguera bien les deux implications).
   (b) Justifier le fait que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
   (c) Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si E_1 et E_2 sont stables par v.
   (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante simple sur $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F})$, pour avoir $u \circ v = v \circ u$.
   (e) Montrer que B commute avec A si et seulement si B est de la forme PD_1P^{-1}, avec D_1 diagonale.
   (f) Montrer que B commute avec A si et seulement si B est de la forme $\lambda A + \mu I_2$.
   On pourra noter qu'il existe toujours une application affine envoyant respectivement 2 et -3 sur deux valeurs imposées, dans le but d'écrire $D_1 = \lambda D + \mu I_2$...

1. Allez, c'est cadeau !

3. *Un système différentiel.*
   On s'intéresse ici aux couples de fonctions (x,y) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) &= 17x(t) + 60y(t) \\ y'(t) &= -5x(t) - 18y(t) \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$
   ce qui peut se traduire $X'(t) = AX(t)$, avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. *Attention, on a en aucun cas supposé que (x,y) vérifiait $(\mathcal{D})$!*
   On définit, pour la suite, deux fonctions x_1 et y_1 par la relation : $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (x,y) vérifie le système $(\mathcal{D})$ si et seulement si (x_1,y_1) vérifie un système différentiel... « un peu plus simple », disons $(\mathcal{D}')$.
   (b) Résoudre $(\mathcal{D}')$; en déduire l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{D})$.
   (c) Pouvait-on se passer du calcul de P^{-1} ?
4. *La version discrète.*
   On s'intéresse maintenant aux suites vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= 17u_n + 60v_n \\ v_{n+1} &= -5u_n - 18v_n \end{cases} \tag{$\mathcal{R}$}$$
   On définit deux nouvelles suites U et V par la relation $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (u,v) vérifie $(\mathcal{R})$ si et seulement si (U,V) vérifie une relation de récurrence plus simple, notée $(\mathcal{R}')$.
   (b) Résoudre $(\mathcal{R}')$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{R})$.

2.3 Rejouons dans $\mathbb{R}^3$

On travaille dans cette partie avec la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de $A - \lambda I_3$.
   On choisira des pivots les plus simples possibles... et fatalement, on sera amené à discuter en fonction des valeurs de λ !
2. Montrer qu'il existe une matrice P (qu'on explicitera) telle que : $A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$.
3. Montrer que les matrices commutant avec A sont exactement celles de la forme $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$.
4. Résoudre le système différentiel
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x'(t) &= -3x(t) - 4y(t) + 10z(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - 5y(t) + 10z(t) \\ z'(t) &= -x(t) - 4y(t) + 8z(t) \end{cases}$$
   avec les conditions initiales $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= -1 \\ z(0) &= 2 \end{cases}$
5. Trouver les suites (u,v,w) vérifiant les relations de récurrence mutuelle
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n - 4v_n + 10w_n \\ v_{n+1} &= -2u_n - 5v_n + 10w_n \\ w_{n+1} &= -u_n - 4v_n + 8w_n \end{cases}$$
   avec les conditions initiales $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= -1 \\ w_0 &= 2 \end{cases}$

2.4 Un générateur automatique d'exercices

Mais comment ai-je fait pour trouver ces matrices A et B semblant compliquées... mais qui peuvent se réduire avec des calculs ne faisant intervenir aucune fraction ?

1. Soit T_1 une matrice triangulaire supérieure à coefficients entiers, possédant uniquement des 1 sur la diagonale. Le cours nous assure que T_1 est inversible. Justifier le fait que T_1^{-1} est une matrice à coefficients entiers et est triangulaire supérieure.
2. On définit $T_2 = T_1^{\mathrm{T}}$. Justifier le fait que T_2 est inversible.
3. Justifier le fait que $P = T_1T_2$ est inversible, et que P^{-1} est à coefficients entiers.
4. Optionnel, en Python (avec le `array` de `numpy`) : expliquer comment on pourrait obtenir une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients entiers tous non-nuls, et telle qu'il existe une matrice inversible P à coefficients entiers (ainsi que son inverse) telle que :

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Fin de l'énoncé

Quelques remarques

1. Il ne faut surtout pas croire que pour toute matrice M, on peut trouver une matrice inversible P et une diagonale D telle que $M = P.D.P^{-1}$ (on dit alors que M est *semblable* à D). Voir par exemple la matrice $Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (qui peut être l'objet de longues réflexions – les yeux plissés comme il se doit).
2. Comme vous le savez, le calcul de A^n est en pratique plus simple si on fait la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur A.
3. Le calcul du commutant d'une matrice se fait par contre effectivement par réduction, comme on l'a vu dans ce problème.
4. On n'a pas toujours $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$ (polynômes en A) : d'une part, on peut avoir $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ de dimension strictement supérieure à 1, ce qui autorise grosso-modo les restrictions de v (commutant avec u) à prendre n'importe quelle valeur ; d'autre part, il se peut que les sous-espaces de la forme $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ aient une somme strictement plus petite que l'espace ambiant ; c'est le cas de la matrice Z vue plus haut (exercice !).
5. L'étude des systèmes dynamiques tels que ceux vus dans le problème peut se faire par des méthodes presse-bouton, mais la compréhension réelle de la nature des solutions passe par les aspects géométrico-matriciels !