1 Séries

1.1 Un développement limité

Inutile de faire semblant de découvrir ce type d'exercice : on va faire un développement asymptotique du terme général jusqu'à obtenir un terme (absolument) convergent.
Après factorisation de n dans les logarithmes, on utilisera (pour u au voisinage de 0) :

$$\ln(1+u) = u + O(u^2)$$

(on pourrait aussi écrire $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$)

$$\begin{aligned} u_n = a\ln(n-1) + b\ln(n) + c\ln(n+1) &= a\ln\left(n(1-1/n)\right) + b\ln n + c\ln\left(n(1+1/n)\right) \\ &= a\left(\ln n - \frac{1}{n} + O(1/n^2)\right) + b\ln(n) + c\left(\ln n + \frac{1}{n} + O(1/n^2)\right) \\ &= (a+b+c)\ln n + (c-a)\frac{1}{n} + O(1/n^2) \end{aligned}$$

On peut lancer la discussion :

— Si $K = a+b+c \neq 0$, alors $u_n \sim K\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Si $a+b+c = 0$:

  — si $R = c-a \neq 0$, alors $u_n \sim \dfrac{R}{n}$, et par comparaison à une série (de Riemann) divergente de signe constant, $\sum u_n$ est divergente ;

  — si $c-a = 0$, alors $u_n = O(1/n^2)$ donc par comparaison à une série convergente de signe constant, $\sum u_n$ est convergente.

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2}\left(a\ln(n-1) + b\ln(n) + c\ln(n+1)\right) \text{ est convergente si et seulement si } a+b+c = c-a = 0.}$$

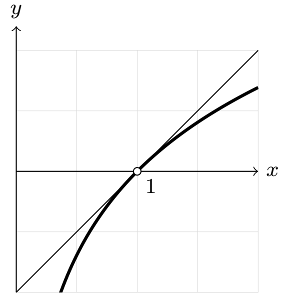
1.2 Produits infinis

1. Par construction, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ($p_{n+1} = (1+u_n)p_n \geqslant p_n$ car $u_n \geqslant 0$) donc tous les p_n sont supérieurs à 1, et notamment strictement positifs. On peut donc en prendre le logarithme. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$. Il y a donc équivalence entre la convergence de la suite $(\ln(p_n))$ et celle de la série $\sum \ln(1+u_n)$.
   Puisque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, ou bien elle est convergente (vers $\ell \geqslant 1$), ou bien $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Si (p_n) converge vers ℓ, alors par continuité de ln en $\ell > 0$ on a $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$ donc $\sum \ln(1+u_n)$ converge, donc son terme général tend vers 0, donc $1+u_n = \mathrm{e}^{\ln(1+u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$, et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Réciproquement, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et à nouveau par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \ln(1+u_n)$ converge, ce qui nous assure que $(\ln(p_n))$ converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité cette fois de l'exponentielle on obtient : $p_n = \mathrm{e}^{\ln(p_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$.

$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge si et seulement si la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

2. (a) Supposons que la série $\sum u_n$ diverge. La suite de ses sommes partielles, étant décroissante, tend donc vers $-\infty$.
Or, pour tout $x \in]-1,0]$, on a, par *concavité*[1] de la fonction logarithme, l'inégalité

$$\ln(1+x) \leqslant x$$



on en déduit que

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Le majorant tend vers $-\infty$, donc $\ln(p_n)$ également, puis :

$$\boxed{p_n = \mathrm{e}^{\ln(p_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

(b) On sait déjà (contraposée de la question précédente) que, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif, alors $\sum u_n$ converge.
Supposons donc que $\sum u_n$ converge. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; notamment, la série négative $\sum \ln(1+u_n)$ a même nature que la série négative $\sum u_n$, donc converge. Si l'on note S sa somme, alors — *par continuité de la fonction exponentielle en S* — la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^S, qui est un nombre réel strictement positif.

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel strictement positif si et seulement si } \textstyle\sum u_n \text{ converge.}}$$

3. Dans le premier cas, puisque la série $\sum 1/n$ diverge, on sait que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut d'ailleurs calculer les sommes partielles et vérifier explicitement que $p_n = 1/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans le deuxième cas, puisque $\sum 1/n^2$ converge, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit admettre une limite non nulle. Calculons les produits partiels. Pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=2}^{n+1}\frac{1-k^2}{k^2} = \prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k-1) \times \prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} k \times \prod_{k=2}^{n+1} k} = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
Dans le troisième cas,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+3k}{(k+1)(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{3}\frac{n+3}{n+1}$$

ce qui prouve que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 0 \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}.}$$

4. On sait déjà que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; on peut donc écrire que $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$. Or, la suite de terme général $u_n^2/2 + o(u_n^2)$ est équivalente à la suite positive de terme général $u_n^2/2$, donc est à valeurs positives (à partir d'un certain rang) et donc, par comparaison de séries positives, converge. Par conséquent, les séries $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature. En passant à l'exponentielle, comme on l'a déjà vu dans la première question :

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite non nulle si et seulement si } \textstyle\sum u_n \text{ converge.}}$$

1. Ou encore : « c'est une inégalité classique » ou encore « en étudiant $x \mapsto x - \ln x$ ».

5. Supposons que $\sum u_n$ converge absolument ; on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour n suffisamment grand, on a $|u_n| < 1$ donc $0 \leqslant u_n^2 < |u_n|$; mais la série $\sum |u_n|$ converge, la série $\sum u_n^2$ converge également par comparaison de séries à termes positifs. On conclut d'après la question précédente que :

$$\boxed{\text{Si la série } \sum u_n \text{ converge absolument alors } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite non nulle.}}$$

6. (a) On peut par exemple décomposer en exponentielles, ou bien utiliser les formules connues[2] de doublement du cosinus hyperbolique :

$$1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{ch}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{2\mathrm{ch}^2(t/2)}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{ch}(t/2)}{\mathrm{sh}(t/2)} \times \frac{2\mathrm{sh}(t/2)\mathrm{ch}(t/2)}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}^*, \text{ on a } \frac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)} = 1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.}$$

(b) Cette question doit être reliée à la question précédente. On essaye de s'y ramener — et parfois, il faut un peu tâtonner. Après quelques essais, on se dit qu'il pourrait être intéressant d'avoir $v_0 = \mathrm{ch}(t)$. Est-ce possible ? Certainement pas si on prend t quelconque. Par contre, on sait que ch réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$; or $x > 1$, donc on peut trouver un (unique) $t > 0$ tel que $v_0 = x = \mathrm{ch}(t)$ (les anciens notaient : $t = \mathrm{Argch}(x)$). On a alors

$$v_1 = 2v_0^2 + 1 = 2x^2 + 1 = 2\mathrm{ch}^2 t + 1 = \mathrm{ch}(2t),$$

puis par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad v_k = \mathrm{ch}(2^{k-1}t).$$

On en déduit, d'après la formule de la question précédente et grâce à quelques collisions, que

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{v_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{th}(2^{k-1}t)}{\mathrm{th}(2^{k-2}t)} = \frac{\mathrm{th}(2^{n-1}t)}{\mathrm{th}(t/2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{th}(t/2)}$$

puisque $2^{n-1}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{th} = 1$. Enfin, on se ramène à la variable x en notant que

$$\frac{1}{\mathrm{th}(t/2)} = \frac{\mathrm{ch}\frac{t}{2}}{\mathrm{sh}\frac{t}{2}} = \frac{2\mathrm{ch}^2\frac{t}{2}}{2\mathrm{sh}\frac{t}{2}\mathrm{ch}\frac{t}{2}} = \frac{\mathrm{ch}t + 1}{\mathrm{sh}t} = \frac{\mathrm{ch}t+1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{v_k}\right) \text{ existe et vaut } \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{v_k}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.}$$

Remarque : *Un résultat partiel, du style* $\dfrac{1}{\mathrm{th}\left((\mathrm{Argch}x)/2\right)}$ *est bien sûr accepté !*

7. L'astuce suivante[3] est parfois utilisée dans des exercices de séries numériques (tombés aux oraux ces dernières années !!!), vous devriez donc la retenir. On écrit

$$1 + u_n = 1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2}{2^n}\right)} = \frac{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)},$$

ce qui permet de collisionner puis prouve, puisque $\sin x \sim x$ au voisinage de 0, que :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = 4^n \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin^2\theta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta^2}{\sin^2\theta}.$$

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k=1}^{\infty} u_k \text{ existe et vaut } \prod_{k=1}^{\infty} u_k = \tfrac{\theta^2}{\sin^2\theta}.}$$

2. Huhu !
3. Un peu à la c..., certes.

2 Réduction sans le dire

2.1 Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

1. $\text{Mat}(u - 2\text{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (deux colonnes/lignes proportionnelles, ou un tour de pivot), donc est non inversible, donc $u - 2\text{Id}_E$ n'est pas bijective donc pas injective. Plus précisément, le noyau de $u - 2\text{Id}_E$ est de dimension $2 - 1 = 1$, et contient visiblement $f_1 = (-4, 1)$ puisque $\begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (autre point de vue : la matrice de $v = u - 2\text{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$ nous indique que $v(e_2) = 4v(e_1)$, donc $v(e_2 - 4e_1) = 0$... et si on ne voit vraiment rien, on résout $(A - 2I_2)X = 0$).

$$\boxed{\text{Ker}\,(u - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(f_1), \text{ avec } f_2 = (-4, 1).}$$

2. De la même façon, $\text{Mat}(u + 3\text{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 20 & 60 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\text{Ker}\,(u + 3\text{Id}_E) = \text{Vect}(f_2), \text{ avec } f_2 = (-3, 1).}$$

3. $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) dans E qui est de dimension 2, donc c'est une base de E. Par ailleurs, $f_1 \in \text{Ker}\,(u - 2\text{Id}_E)$, donc $u(f_1) = 2f_1$, et de même, $u(f_2) = -3f_2$. Ainsi :

$$\boxed{D = \text{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

4. P est par définition la matrice représentant les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base $\mathcal{E}$, et donc :

$$\boxed{P = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\text{Pas}} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. On est exactement dans le cadre du théorème de changement de base :

$$\begin{array}{ccc} E, \mathcal{E} & \xrightarrow[A]{u} & E, \mathcal{E} \\ {\scriptstyle Id_E}\big\uparrow{\scriptstyle P} & & {\scriptstyle Id_E}\big\downarrow{\scriptstyle P^{-1}} \\ E, \mathcal{F} & \xrightarrow[D]{u} & E, \mathcal{F} \end{array}$$

$A = \text{Mat}(u, \mathcal{E})$, $D = \text{Mat}(u, \mathcal{F})$, et $P = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\text{Pas}}$, donc $D = P^{-1}.A.P$, ou encore :

$$\boxed{A = P.D.P^{-1}}$$

6. $P^{-1} = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\text{Pas}}$ est la matrice représentant les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{F}$. Or $f_1 - f_2 = -e_1$, donc $e_1 = -f_1 + f_2$. Mais $f_1 = -4e_1 + e_2$, donc $e_2 = f_1 + 4e_1 = -3f_1 + 4f_2$, et ainsi :

$$\boxed{P^{-1} = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\text{Pas}} = \text{Mat}\left((e_1, e_2), \mathcal{F}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

2.2 Quatre applications

1. (a) On a sans problème $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$, puis par récurrence immédiate [4] :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$$

4. Allez, je vous l'accorde !

(b) On peut commencer par observer :

$$A^2 = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}; \quad A^3 = P.D^2.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1}$$

puis montrer par une récurrence (qu'on peut encore déclarer immédiate) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P.D^n.P^{-1}.}$$

Un autre point de vue plus direct consistait à voir que $A^n = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})^n$, $D^n = \mathrm{Mat}(u^n, \mathcal{F})$, *et* $P = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$, *donc d'après la formule de changement de base,* $D^n = P^{-1}.A^n.P$, *ou encore :* $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
E, \mathcal{E} \arrow[r, "u^n", "A^n"'] & E, \mathcal{E} \arrow[d, "Id_E"', "P^{-1}"] \\
E, \mathcal{F} \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "u^n", "D^n"'] & E, \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

(c) Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 4.2^n - 3(-3)^n & -12.2^{''} - 12(-3)^n \\ -2^n + (-3)^n & -3.2^n + 4(-3)^n \end{pmatrix}}$$

2. (a) Si $u \circ v = v \circ u$, alors les matrices dans la base $\mathcal{E}$ de $u \circ v$ et de $v \circ u$ sont égales, donc $AB = BA$. Réciproquement, si $AB = BA$, alors $\mathrm{Mat}(u \circ v, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(v \circ u, \mathcal{E})$, et *l'injectivité* de $w \mapsto \mathrm{Mat}(w, \mathcal{E})$ nous assure que $u \circ v = v \circ u$;

$$\boxed{\text{ce qui prouve l'équivalence demandée.}}$$

(b) (f_1, f_2) constitue une base E. On sait alors que si on la casse en deux, les deux sous-espaces engendrés constituent deux sous-espaces supplémentaires, ce qui nous donne ici directement le résultat souhaité :

$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$$

(c) Supposons d'abord : $u \circ v = v \circ u$. Pour montrer que E_1 est stable par v, fixons $f \in E_1$, et montrons que $v(f) \in E_1$, c'est-à-dire : $v(f) \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E)$. On calcule pour cela :

$$u\,(v(f)) = u \circ v(f) = v \circ u(f) = v\,(u(f)) = v(2f) = 2v(f),$$

et ainsi, $v(f) \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E)$, ce qu'il fallait démontrer. La stabilité de E_2 par v se traite de façon identique.

Supposons maintenant que E_1 et E_2 sont stables par v, et montrons que $u \circ v = v \circ u$. On fixe pour cela $x \in E$: il peut se décomposer (d'après la question précédente) $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On a alors $u(x_1) = 2x_1$, mais $v(x_1) \in E_1$, donc on a aussi $u\,(v(x_1)) = 2v(x_1)$, avec des relations similaires pour x_2. Ainsi :

$$u \circ v(x) = u\,(v(x_1 + x_2)) = u\,(v(x_1) + v(x_2)) = u\,(v(x_1)) + u\,(v(x_2)) = 2v(x_1) - 3v(x_2) = v(2x_1 - 3x_2)$$

alors que :

$$v \circ u(x) = v\,(u(x_1 + x_2)) = v\,(u(x_1) + u(x_2)) = v(2x_1 - 3x_2).$$

On a bien montré que pour tout $x \in E$, $u \circ v(x) = v \circ u(x)$. ■

$$\boxed{u \circ v = v \circ u \text{ si et seulement si } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont stables par } v.}$$

(d) $E_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$, donc la stabilité de E_1 par v se traduit par le fait que $v(f_1) \in E_1$, c'est-à-dire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(f_1) = \lambda f_1$. Le même raisonnement s'applique évidemment pour f_2, et ainsi : $u \circ v = v \circ u$ si et seulement s'il existe deux scalaires λ et μ tels que : $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

$$\boxed{u \circ v = v \circ u \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}\,v, \mathcal{F}) \text{ est diagonale.}}$$

(e) Il est clair que deux matrices diagonales commutent. Si B est de la forme PD_1P^{-1}, avec D_1 diagonale, on a donc :

$$AB = P.D.P^{-1}.P.D_1.P^{-1} = P.DD_1.P^{-1} = P.D_1D.P^{-1} = P.D_1.P^{-1}.P.D.P^{-1} = BA.$$

Réciproquement, supposons : $AB = BA$. On a alors $u \circ v = v \circ u$. Mais alors, $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F})$ est diagonale d'après de qui précède. Notons-la D_1 : la formule de changement de base nous donne $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{E}) = P.\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}).P^{-1}$, c'est-à-dire $B = P.D_1.P^{-1}$. ■

$$\boxed{B \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } B \text{ est de la forme } PD_1P^{-1}, \text{ avec } D_1 \text{ diagonale.}}$$

Pour la réciproque, le point de vue expliqué rapidement au détour d'un TD était celui élémentaire du calcul : si $AB = BA$, alors en notant $B' = P^{-1}BP$ on a $B'D = ... = DB'$, donc B' commute avec la matrice diagonale à éléments diagonaux distincts D, et un calcul simple de $B'D - DB'$ montre que B' est diagonale.

(f) Il est clair que si $B = \lambda A + \mu I_2$, alors $AB = BA$ (ben oui : calculer l'un et l'autre !). Réciproquement, supposons $AB = BA$. On a alors $B = P.D_1.P^{-1}$, avec D_1 de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Si on a bien compris que par deux points, on peut toujours faire passer une droite(!), ou bien en résolvant un bien difficile système $(2, 2)$ ou invoquer Lagrange et ses polynômes d'interpolation... on peut affirmer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $2\lambda + \mu = \alpha$ et $-3\lambda + \mu = \beta$. On a alors $\lambda D + \mu I_2 = D_1$, donc :

$$B = P.D_1.P^{-1} = P\left(\lambda D + \mu I_2\right)P^{-1} = \lambda P.D.P^1 + \mu P.P^{-1} = \lambda A + \mu I_2.$$

$$\boxed{B \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } B \text{ est de la forme } \lambda A + \mu I_2.}$$

3. (a) Sans problème :

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ vérifie } (\mathcal{D}) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = P.D.P^{-1}X(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}X'(t) = D.P^{-1}X(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X_1'(t) = D.X_1(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) \\ y_1'(t) = -3y_1(t) \end{cases} \qquad (\mathcal{D}')
\end{aligned}$$

Le lecteur est prié de se convaincre de ces **équivalences** *autrement que « ben oui ceci implique bien cela, puisqu'il le dit ».*

Ce système est en effet considérablement plus simple : il n'y a plus de dépendances mutuelles.

(b) Si on en croit le programme de terminale, le système $(\mathcal{D}')$ est équivalent à l'existence de deux réels α et β tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = \alpha e^{2t}$ et $y_1(t) = \beta e^{-3t}$. Mais $X = PX_1$, donc :

$$\boxed{(x, y) \text{ vérifie } (\mathcal{D}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = -4\alpha e^{2t} - 3\beta e^{-3t} \\ y(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-3t} \end{cases}}$$

(c) Le calcul de P^{-1} n'était pas nécessaire : à la fin, on a seulement eu besoin de : $X = PX_1$.

4. (a) Le principe est le même que plus haut : en notant $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $Z_n' = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = P^{-1}Z_n$:

$$\begin{aligned}
(u, v) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = AZ_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = P.D.P^{-1}Z_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}Z_{n+1} = D.P^{-1}Z_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1}' = D.Z_n' \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} U_{n+1} = 2U_n \\ V_{n+1} = -3V_n \end{cases} \qquad (\mathcal{R}')
\end{aligned}$$

(b) Si on fait cette fois confiance au programme de première, on peut affirmer que $(\mathcal{R}')$ est équivalente à l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha 2^n$ et $V_n = \beta(-3)^n$.

(c) D'après les équivalences précédentes, et puisque $Z_n = PZ'_n$:

$$\boxed{(u,v) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n &= -4\alpha.2^n - 3\beta(-3)^n \\ v_n &= \alpha.2^n + \beta(-3)^n \end{cases}}$$

2.3 Rejouons dans $\mathbb{R}^3$

1. On échange la première et la troisième ligne, pour avoir un gentil pivot :

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ -2 & -5-\lambda & 10 \\ -3-\lambda & -4 & 10 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14 \end{pmatrix}$$

Dans la deuxième ligne, on peut factoriser $\lambda - 3$. Ainsi :

— Si $\lambda = 3$, alors le rang de $A - \lambda I_3$ est celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire 2

— Si $\lambda \neq 3$, alors le rang de $A - \lambda I_3$ est celui (après l'opération $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3-\lambda} L_2$, qui conserve le rang) de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire (après l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (8+4\lambda)L_2$) celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, avec $d = \lambda^2 - 5\lambda - 14 + 2(8+4\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, -2\}$ alors $d \neq 0$, donc $A - \lambda I_3$ est de rang 3. Et si λ vaut -1 ou -2 alors $d = 0$, donc $A - \lambda I_3$ est de rang 2.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{-2, -1, 3\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Inspirés par la première partie de ce problème et les calculs précédents, on note u l'application linéaire canoniquement associée à A, et on cherche les noyaux de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$, avec $\lambda \in \{-2, -1, 3\}$. On sait déjà qu'ils sont de dimension $3 - 2 = 1$, donc ce sont des droites. Il suffit alors de trouver un élément non nul de chacun de ces noyaux...

— $\mathrm{Mat}(u + 2\mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 10 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 10 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ \phantom{-x_1 - {}} 5x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_2 + 10x_3 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Et ainsi (après un petit coup de $\mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}_E) = \{... \mid ... \in ...\}$) :

$$\mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_1), \text{ avec } f_1 = (2, 2, 1).$$

— De même : $\mathrm{Mat}(u + \mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = A + I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ -2 & -4 & 10 \\ -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$, puis (left to the reader) :

$$\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_2), \text{ avec } f_2 = (1, 2, 1).$$

— Et enfin, $\mathrm{Mat}(u-3\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A-3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ -2 & -8 & 10 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, puis :

$$\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_3), \text{ avec } f_3 = (1,1,1).$$

On montre ensuite que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base [5] de $\mathbb{R}^3$, en calculant le rang de cette famille, qui est aussi le rang de la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est celui de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, mais aussi celui de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce rang vaut donc 3 : $\mathcal{F}$ est alors génératrice, donc constitue une base de E. Mais par définition des f_i, on a $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$, et la formule de changement de base nous donne alors $A = P.D.P^{-1}$, ce qui était le résultat attendu.

$$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

3. L'implication « $B = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 \;\Rightarrow\; AB = BA$ » est aussi évidente qu'une heure auparavant... Pour le sens non trivial, on suppose $AB = BA$ et on reprend le plan de la partie 3.2, en notant v l'endomorphisme canoniquement associé à $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
   (a) $AB = BA$ se traduit géométriquement par $u \circ v = v \circ u$.
   (b) De même, la relation $u \circ v = v \circ u$ implique que les droites engendrées par f_1, f_2 et f_3 sont stables par v, essentiellement car ces droites sont des noyaux de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$. La réciproque est inutile ici, mais reste vrai parce que $\mathcal{F}$ est une base de E.
   (c) On en déduit que B est de la forme $P.D_1.P^{-1}$, avec D_1 une matrice diagonale.
   (d) Notant $D_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels qu'en posant $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, on ait $P(-2) = a$, $P(-1) = b$ et $P(3) = c$: c'est le théorème d'interpolation de Lagrange qui le dit... mais on peut le retrouver en résolvant un système à trois équations et trois inconnues (mouais... on va préférer Lagrange, non ?).
   On a alors :
   $$B = P.D_1.P^{-1} = P\left(\alpha D^2 + \beta D + \gamma I_3\right)P^{-1} = \alpha P.D^2.P^{-1} + \beta P.D.P^{-1} + \gamma P.P^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

■

4. Notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel se traduit $X' = AX$, soit encore, en posant

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) \;\; :$$

$X'1 = DX$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_1' &= -2x_1 \\ y_1' &= -y_1 \\ z_1' &= 3z_1 \end{cases}$ ce qui est équivalent à l'existence de trois constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x_1(t) &= \alpha \mathrm{e}^{-2t} \\ y_1(t) &= \beta \mathrm{e}^{-t} \\ z_1(t) &= \gamma \mathrm{e}^{3t} \end{cases}$. Les conditions initiales se traduisent

5. Nous saurons bientôt (cours sur la réduction) « qu'en tant que famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, elle est libre... »

$X_1(0) = P^{-1}X(0)$, ce qui permet d'obtenir directement $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ si on a calculé P^{-1} (ce qui n'est pas le cas ici, mais qui serait assez aisé). On va se contenter de résoudre le système $PX_1(0) = X(0)$:

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{cases}\alpha &= -1\\ \beta &= -2\\ \gamma &= 5\end{cases}$$

Le système différentiel proposé, avec les conditions initiales imposées, possède donc une unique solution :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\qquad \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\y(t)\end{pmatrix} = X(t) = PX_1(t) = \begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}+5\mathrm{e}^{3t}\\-2\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-t}+5\mathrm{e}^{3t}\\-\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}+5\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}}$$

5. De façon assez originale, on note $Z_n = \begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$ et $Z'_n = \begin{pmatrix}U_n\\V_n\\W_n\end{pmatrix} = P^{-1}Z_n$: on a $Z'_{n+1} = D.Z'_n$, donc les suites U, V et W sont géométriques de raisons -2, -1 et 3. Les conditions initiales se traduisent par ailleurs $Z'_0 = PZ_0$, soit encore $\begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_0\\V_0\\W_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, système qui a déjà été résolu ! On a donc $\begin{pmatrix}U_0\\V_0\\W_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}U_n\\V_n\\W_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1(-2)^n\\-2(-1)^n\\5.3^n\end{pmatrix}$

Il existe donc un unique triplet de suites vérifiant les relations de récurrences et les conditions initiales de l'énoncé :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = X'_n = PX_n = \begin{pmatrix}-2(-2)^n-2(-1)^n+5.3^n\\-2(-2)^n-4(-1)^n+5.3^n\\-(-2)^n-2(-1)^n+5.3^n\end{pmatrix}}$$

2.4 Un générateur automatique d'exercices

1. Pour inverser T_1, on peut la voir comme la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}^3$, disons $T_1 = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$. On a alors $T_1^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$. Mais si on a bien compris comment on résout un système triangulaire tel que

$$\begin{cases} e_1 & & & & &= f_1\\ \alpha_{2,1}e_1 &+ e_2 & & & &= f_2\\ \alpha_{3,1}e_1 &+ \alpha_{3,2}e_2 &+ e_3 & & &= f_3\\ & & &\ddots & & \\ \alpha_{n,1}e_1 &+ &\cdots &\alpha_{n,n-1}e_{n-1} &+ e_n &= f_n\end{cases}$$

on est bien convaincu qu'on aura pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, e_k de la forme $f_k + \sum\limits_{i<k}\beta_{k,i}f_i$ avec les $\beta_{k,i}$ entiers. Cela se prouverait par récurrence (avec prédécesseurs). On a ainsi :

$$\boxed{T_1^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix}1&\beta_{2,1}&\cdots&\beta_{n,1}\\0&1&&\\ \vdots&&\ddots&\beta_{n,n-1}\\0&&(0)&1\end{pmatrix}\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{Z}).}$$

2. Prouvons ce résultat à la frontière du cours...
On a $T_1.T_1^{-1} = I_n$, donc en transposant : $(T_1^{-1})^{\mathrm{T}}\,T_1^{\mathrm{T}} = I_n^{\mathrm{T}} = I_n$, et de même, $T_1^{-1}T_1 = I_n$ fournit $T_1^{\mathrm{T}}(T_1^{-1})^{\mathrm{T}} = I_n^{\mathrm{T}} = I_n$. Ainsi :

$$\boxed{T_1^{\mathrm{T}} \text{ est inversible, d'inverse } (T_1^{-1})^{\mathrm{T}}.}$$

3. P est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible. Par ailleurs, $P^{-1} = (T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1} = (T_1^{-1})^{\mathrm{T}}\, T_1^{-1}$ est le produit de deux matrices à coefficients entiers d'après la question 1, donc est elle-même à coefficients entiers.

$$\boxed{P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

4. On prend T_1 comme dans la première question : par exemple $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis on calcule $P = T_1\, T_1^{\mathrm{T}}$ et enfin $C = P\,\mathrm{Diag}(5, 4, -2) P^{-1}$:

```
from numpy import *
T1 = array([[1, 2, -1], [0, 1, 1], [0, 0, 1]])
P = dot(T1, transpose(T1))
D = array([[5, 0, 0], [0, -4, 0], [0, 0, -2]])
C = dot(P, dot(D, linalg.inv(P)))
"""
>>> print(P)
[[ 6  1 -1]
 [ 1  2  1]
 [-1  1  1]]
>>> print(C)
[[  44.  -94.  140.]
 [  15.  -36.   49.]
 [  -3.    4.   -9.]]
>>> print(linalg.inv(P).dot(C).dot(P))
[[  5.00000000e+00   1.06581410e-14   1.06581410e-14]
 [  1.63424829e-13  -4.00000000e+00  -7.46069873e-14]
 [ -2.23820962e-13   4.61852778e-14  -2.00000000e+00]]
"""
```