



# Khôlles : quinzaine numéro 3

*Du 14 octobre au 8 novembre 2024*

Le cours, à défaut de reculer, n'a guère avancé...

## 1 Première semaine : algèbre linéaire

De l'algèbre linéaire... C'était censé être fait depuis une semaine :

- Images et noyaux itérés. Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.
- Hyperplans et formes linéaires (histoire de suivre le programme officiel, mais...).
- Calcul matriciel : changements de bases, réduction du rang ( $PAQ = J_r$ ).

## 2 Deuxième semaine : fin de l'algèbre linéaire, réduction

En plus : la fin d'algèbre linéaire, et le début de la réduction.

- Les matrices de rang 1 ont fait l'objet d'une attention toute particulière.
- Quand une base est adaptée à l'image et/ou au noyau d'une application linéaire (ce qui n'est pas rare, surtout quand on la construit dans ce but...), la matrice de l'application dans cette base n'est pas quelconque!
- Déterminant (en pratique; ne pas creuser la théorie!).
- Polynômes : rappels de première année, interpolation, relations coefficients-racines (aucune à connaître; toutes à savoir retrouver).
- (Re)découverte des projections et symétries.
- Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres; endomorphismes diagonalisables (existence d'une base diagonalisante, ou  $E$  s'écrivant comme somme des sous-espaces propres). Extension aux matrices (mais le point de vue géométrique est toujours présent).
- Étude à la main de quelques cas comme les matrices triangulaires, et les endomorphismes ou matrices de rang 1.

## 3 Questions de cours

- (S1) Grassmann par construction d'une base adaptée.
- (S1) Formule du rang (aka « théorème du rang »).
- (S1) Un sous-espace  $H$  d'un espace  $E$  de dimension finie est le noyau d'une forme linéaire non nulle si et seulement s'il est de dimension  $\dim(E) - 1$ .
- (S1+S2) Si  $A$  est de rang 1, alors  $A^2 = (\text{tr } A)A$ .
- (S1+S2) Si  $M$  est de rang  $r$ , alors il existe  $P$  et  $Q$  inversibles telles que  $PAQ = J_r$ .
- (S2) Théorème d'interpolation de Lagrange.
- (S2) Un endomorphisme  $f$  vérifie  $f \circ f = f$  si et seulement s'il existe deux sous-espaces supplémentaires  $E_1$  et  $E_2$  tels que  $f$  est la projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ .
- (S2) Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- (S2) Si  $u$  et  $v$  commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

## 4 Coming next

Prochaine quinzaine : suite et fin de la réduction; début des séries de fonctions (?)

Attention, la semaine du 11 novembre saute. Reprise donc le lundi 18 novembre.