Réduction des endomorphismes... *et des matrices*

1 Petit rang... gros noyau

Exercice 1 – *2022 [4/10]*
Montrer en faisant le moins de calculs possible que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Exercice 2 – *ENSAM 2018 [6/10]*
On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$, et on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $A^2 = (\mathrm{tr}(A))A$.
4. Calculer les puissances de A.
5. A et L sont-elles semblables ?
6. Discutez des conditions pour que deux matrices de rang 1 soient semblables.

Exercice 3 – *CCP 2018 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle. On définit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\mathrm{tr}(A))M - (\mathrm{tr}(M))A$.

1. Justifier brièvement que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $f \circ f(M)$, et en déduire d'une seconde façon que f est diagonalisable.

Exercice 4 – *Mines 2017 [4/10]*
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donner les éléments propres de $M = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_nx_1 & \cdots & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 – *CCP 2017 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$). telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Exercice 6 – *CCP 2017 [5/10]*

Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & \cdots & a^{2n-2} \end{pmatrix}$

1. Dans le cas $a \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une valeur propre de A.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 7 – *TPE 2017 [2/10]*

Soit $n \geqslant 2$. On définit $A = \begin{pmatrix} 4 & & & (1) \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. $A - 3I_n$ est-elle inversible ?
3. Donner les éléments propres de A.

Exercice 8 – *CCP 2017 [7/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit par bloc $A_{n+1} = \begin{pmatrix} J_n & (0) \\ (0) & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $J_n \in \mathcal{M}_n(R)$ constituée uniquement de 1.

1. Justifier que A_{n+1} est diagonalisable.
2. Diagonaliser J_n.
3. Connaissant un vecteur propre de J_n, comment construire un vecteur propre de A_{n+1} ?
4. Diagonaliser A_{n+1}.

2 Exemples numériques

Exercice 9 – *CCINP 2022 [5/10] - Corentin C.*

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' &= -2x - 2y \\ y' &= 2x + 3y \\ z' &= x + 3z \end{cases}$

Exercice 10 – *CCP 2017 [5/10]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Expliciter une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que u et v soient des vecteurs propres de A.
4. A est-elle trigonalisable ?

Exercice 11 – *Mines-Télécom 2016 [3/10]*

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 12 – *IMT 2016 [4/10]*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. A et B sont-elles semblables ?
3. Calculer A^n.

Exercice 13 – *CCP 2016 [3/10]*

On considère dans cet exercice la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A ; en déduire son spectre.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Expliciter P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut la matrice de f dans cette base ?
5. Calculer P^{-1} et vérifier la valeur de $P^{-1}AP$.
6. À l'aide de A^2, A et I_3, déterminer A^{-1}.

Exercice 14 – *Mines 2010 [3/10]*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C$. La matrice AB est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 – *Mines 2015 [3/10]*

Déterminer $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Mais aussi...

Exercice 16 – *CCINP 2022 [5/10] - Anna B.*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
4. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 17 – *CCP 2017 [6/10]*
Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 4M^2 - 4M = 0$, avec $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 18 – *Mines 2017 [5/10]*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, puis u un isomorphisme de E tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 19 – *CCP 2016 [2/10]*
La matrice $\begin{pmatrix} 2+i & i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 – *Mines-Télécom 2016 [3/10]*
On considère l'application transposition :

$$u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto M^{\mathrm{T}}$$

1. u est-elle inversible ?
2. u est-elle diagonalisable ?
3. Donner le déterminant et la trace de u.

Exercice 21 – *Mines 2010 (PC) [7/10]*
Soient $n \geqslant 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $j = i+1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?
Penser en termes d'indice de nilpotence.

Exercice 22 – *[3/10]*
Soient $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $d \geqslant 2$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^d l'est.

Exercice 23 – *Mines 2012 [6/10]*
Déterminer le spectre de $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 24 – *Mines 2012 [6/10]*
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Même question avec l'équation $Q(B) = A$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 25 – *Mines 2018 [8/10]*
E est ici un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
   (a) Montrer : $\det(\mathrm{Id}+u) = 1$.
   (b) Soit $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer : $\det(v+u) = \det(v)$.
2. On suppose : $f = d + n$ avec $d \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, et $d \circ n = n \circ d$. Montrer que f et d ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités.

Exercice 26 – *Centrale 2018 [1/10]*
Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

Exercice 27 – *CCP 2018 (3 fois, à des dates différentes !) [3/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^kB - BA^k = k\alpha A^k$.
2. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 28 – *Centrale 2018 [7/10]*
Soit $n \geqslant 2$, et A une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$. On s'intéresse à l'équation $B^2 = A$.

1. Résoudre cette équation lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Dans le cas général, discuter le nombre de solutions.

4 Posés en colle

Exercice 29 – *C. Stérin 2023-2024 [4/10]*
Étudier la diagonalisabilité de $A = \left(\binom{i}{j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 30 – *P. Bel 2023-2024 [5/10]*
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Étudier la diagonalisabilité de $M = ((a_i a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 31 – *L. Mermet 2023-2024 [6/10]*
Pour quels $a \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Lorsqu'elle ne l'est pas, est-elle trigonalisable ?

Exercice 32 – *L. Mermet 2023-2024 [6/10]*
Déterminer le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de $M^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 33 – *B. Saleur 2023-2024 [1/10]*
L'application $P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P - P'$ est-elle diagonalisable ?

5 Des indications

Exercice 1 – A est clairement (huhu !) de rang 1 puisque les colonnes sont toutes colinéaires avec la première ! En cognant A contre cette première colonne, on voit même que l'image est incluse dans le noyau. On fait alors notre dessin préféré, on construit une base adaptée au problème, et c'est fini.

Exercice 2 – C'est du cours... enfin c'est dans mon cours ! Au choix : $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, ou bien $\mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Im}\,(A) = \{0\}$. La preuve réside sur une discussion quant à l'hyperplan $\mathrm{Ker}\,(A)$ versus la droite $\mathrm{Im}\,(A)$.

Exercice 3 – Le noyau de $f - (\mathrm{tr}(A))\mathrm{Id}$ ést assez gros. Je trouve $f^2 = (\mathrm{tr}(A))f$, ce qui fournit $X(X - \mathrm{tr}(A))$ comme polynôme annulateur scindé à racines simples. Accessoirement, je trouve la question 2 plus naturelle après avoir réfléchi à la diagonalisation, qui fait apparaître naturellement les sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})$.

Exercice 4 – Sauf cas exceptionnel ($X = 0$), $M = X\,X^{\mathrm{T}}$ est de rang 1, avec $\mathrm{Im}\,(X) \not\subset \mathrm{Ker}\,(X)$.

Exercice 5 – Dès qu'on voit $A^2 = (\mathrm{tr}(A))A = A$, l'affaire est pliée ! Si l'examinateur grogne, on reprend la preuve, en partant par exemple d'une base du noyau et en complétant ; etc.

Exercice 6 – Encore une matrice de rang 1 ; il s'agit alors de savoir si l'image est incluse ou non dans le noyau, ce qui donne la condition : $1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n-2} \neq 0$. On retrouve cette condition si on le pense plutôt en termes de trace...

Exercice 7 – Hum, comment dire... A ne serait-elle pas proche d'une matrice de rang 1 ?

Exercice 8 – On a déjà diagonalisé J_n quelques milliers de fois... Si $J_nX = 0$, alors $A_{n+1}\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; si $J_nX = nX$, alors $A_{n+1}\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_{n+1}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$: cela nous fournit $(n-1)+2$ vecteurs propres... dont on montre qu'ils constituent une famille libre.

Exercice 9 – Je trouve comme valeurs propres : 2, -1 et 3 (c'est cohérent avec la trace...) avec comme vecteurs propres associés respectivement $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Inutile d'inverser la matrice de passage, n'est-ce pas ?

Exercice 10 – Je trouve $\chi_A = (X-2)^2(X+1)$, ce qui est cohérent avec la trace (oui, n'est-ce pas, vous aviez comme toujours vérifié...).

Exercice 11 – A est de rang 1, et son image – engendrée par $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ – est dans le noyau (check it !), donc on doit pouvoir prendre une base de $\mathbb{R}^3$ très bien adaptée à la géométrie de l'endomorphisme canoniquement associé à A en prenant f_3 en dehors du noyau, puis $f_1 = u(f_3)$, puis f_2 complétant f_1 pour en faire une base du noyau...

Exercice 12 – $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$...

Exercice 13 – J'ai commencé par la quatrième question... mais évitez de faire ce genre de petite blague le jour de l'oral !

Exercice 14 – Un peu misérable. Après avoir vu que B est inversible et C diagonalisable, on peut écrire : $AB = B^{-1}(BA)B$...

Exercice 15 – Si on note S la matrice du membre de droite, alors $S + I$ doit rapidement être réduite, donc S aussi, qui a pour valeurs propres -1 (triple) et 3... et heureusement qu'on est sur $\mathbb{C}$.
On aura noté qu'il n'était pas question de résoudre l'équation $M^2 = S$ mais de trouver une *solution.*

Exercice 16 – Le premier point est du cours. Ensuite, décomposer χ_A en produit d'irréductibles, et constater que chacun, évalué en B, donne une matrice inversible. Pour le troisième point, $A^k X = XB^k$, puis $P(A)X = XP(B)$, que j'appliquerais bien à $P = \chi_A$. Enfin, l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $X \mapsto AX - XB$ me semble injectif...

Exercice 17 – Le polynôme annulateur scindé à racines simples $X^3 - 4X^2 - 4X = X(X-\alpha)(X-\beta)$ nous assure qu'une éventuelle solution est diagonalisable. Mais une fois diagonalisée, la trace nulle imposerait que $\sqrt{2}$ soit rationnel (ce qui n'est guère raisonnable) sauf dans le cas trivial où $\operatorname{Ker}(M - \alpha I_n)$ et $\operatorname{Ker}(A - \beta I_n)$ sont réduits) $\{0\}$...

Exercice 18 – La diagonalisabilité de u nous donne un polynôme annulateur de u^2 scindé à racines simples, donc un polynôme annulateur de u plus compliqué, mais qui est aussi scindé (on est dans $\mathbb{C}$, donc $X^2 - \lambda = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$) et à racines simples (les valeurs propres sont différentes de 0).

Exercice 19 – Sans avoir fait le calcul, je suis prêt à parier que cette matrice pourtant symétrique n'est pas diagonalisable... Arf ; après calcul, elle l'est ! J'imagine que l'examinateur attendait seulement l'erreur de raisonnement « symétrique donc diagonalisable », ce qui est assez crétin : autant donner un exemple sur lequel la conclusion est fausse !

Exercice 20 – J'aurais tendance à penser que $u^2 = \mathrm{Id}_E$, et on est ramené au programme de première année sur les symétries...

Exercice 21 – B serait nilpotente d'indice... trop grand puisqu'on aurait $B^{2n-2} \neq 0$!

Exercice 22 – n sens n'est pas trop difficile... Pour l'autre : on se place dans les sous-espaces propres de M^d : chacun est stable par M, et la restriction de M à ce sous-espace est annulée par un polynôme scindé à spectre simple de la forme $X^d - \lambda$ (ça marche car on est dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 23 – Petit rang... Bon, la trace de ette matrice puis de son carré peuvent aider.

Exercice 24 – En prenant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $Q^{-1}BQ = \mathrm{Diag}(-1, 1, 1)$. On est alors ramené à un (deux !) problèmes d'interpolation polynomiale.

Exercice 25 – J'écrirais bien $v + u = v \circ (\mathrm{Id} + v^{-1} \circ u)$: u commute avec v^{-1}, donc $v^{-1} \circ u$ est bien nilpotent... On peut en déduire que lorsque λ n'est pas valeur propre de d (et donc que $d - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible) on a $\det(f - \lambda\mathrm{Id}_E) = \det((d - \lambda\mathrm{Id}_E) + n) = \det(d - \lambda\mathrm{Id}_E)$. Pour étendre cette relation à tous les réels λ, il suffit de noter qu'on est face à deux polynômes (donc continus) qui coïncident sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points...

Exercice 26 – J'imagine que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ doit faire l'affaire...

Exercice 27 – Classique : l'opérateur $M \mapsto MB - BM$ possède un nombre fini de valeurs propres...

Exercice 28 – Après diagonalisation (n valeurs propres distinctes), analyse/synthèse géométrique... ou matricielle ! On trouvera 2^n solutions.

Exercice 29 – Matrice de rang 1, de trace non nulle...

Exercice 30 – Matrice de rang 1 (ou nul !). La trace est-elle nulle ?

Exercice 31 – Il me semble que $\chi_A = X(X-1)(X-a)$, et il s'agit donc de discuter.

Exercice 32 – Sauf erreur, $\chi_A = (X-1)(X-3)(X+4)$, donc je pronostique : aucune solution sur $\mathbb{R}$, et 8 sur $\mathbb{C}$.

Exercice 33 – La matrice dans la base canonique donne pas mal d'informations.