Préparation à la réduction

À rendre le mardi 15 octobre 2024 dernier délai.

Il s'agit d'un DM essentiellement technique : les calculs de « polynômes caractéristiques » et de « sous-espaces propres » devront être faits de façon fluide et « sans trop avoir à réfléchir » très bientôt.

1 Des polynômes caractéristiques

Pour chacune des matrices suivantes, disons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer le polynôme caractéristique, c'est-à-dire la valeur, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, de $\det(\lambda I_n - M)$. Déterminer ensuite les racines de ce polynôme (les « valeurs propres »).

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ i & 1-i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_2 & \gamma \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix}$$

Pour B on se contentera de prouver qu'il y a deux valeurs propres distinctes, sans les expliciter. Et pour H, inutile de chercher les racines de ce polynôme trop général !

2 Des sous-espaces propres

Pour chacune des matrices M parmi A, B, C et D et pour chaque valeur propre λ de M, déterminer le sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$, où u est l'application linéaire canoniquement associée à M.
Pour chacune de ces 4 matrices/endomorphismes, dire si la somme (directe) des sous-espaces propres est égale à l'espace ambiant $\mathbb{K}^n$.

Pour B on montrera que la somme vaut $\mathbb{K}^n$ sans expliciter les sous-espaces propres.

3 Une grosse matrice

On s'intéresse à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & \\ & & 0 & 3 & & & \\ & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(il y a des zéros en dehors des blocs). On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ canoniquement associé à J.

1. Déterminer les valeurs propres de J (les λ tels que $J - \lambda I_7$ n'est pas inversible).
2. Pour chaque valeur propre λ, déterminer les noyaux $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$ puis de $\mathrm{Ker}\,((u - \lambda \mathrm{Id})^2)$ etc... jusqu'à ce que ces noyaux stagnent.
   On résumera dans un tableau la dimension des différents noyaux.