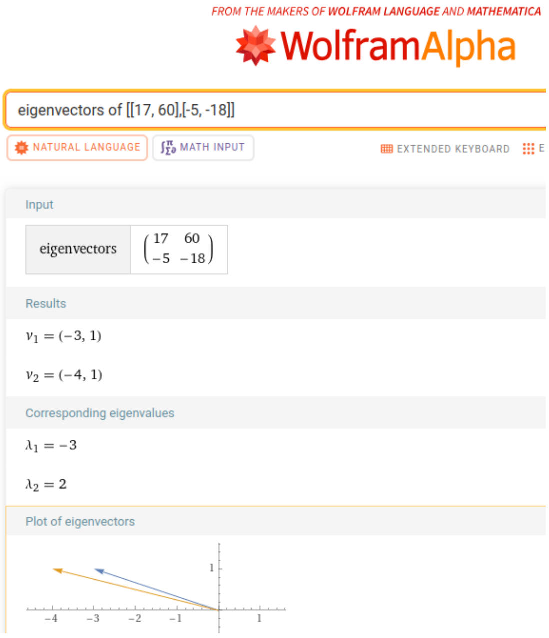
Préparation à la réduction



1 Des polynômes caractéristiques

1. Tout d'abord :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-17 & -60 \\ 5 & \lambda+18 \end{vmatrix} = (\lambda-17)(\lambda+18)+300 = \lambda^2+\lambda-6$$

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+3) \text{ et donc } \mathrm{Sp}(A) = \{2,-3\}}$$

2. On trouve directement :

$$\chi_B(\lambda) = \cdots = \lambda^2-3\lambda+4-i$$

Ce polynôme (on se comprend) possède pour discriminant $\Delta = \cdots = -7+4i$. Puisque ce complexe est non nul, il est le carré d'un autre complexe $\delta \neq 0$. Les racines de χ_B sont alors $\dfrac{3\pm\delta}{2}$:

$$\boxed{\chi_B(\lambda) = \lambda^2-3\lambda+4-i \text{ possède deux racines distinctes.}}$$

3. Le calcul de χ_C va se faire en choisissant un pivot raisonnable : $\lambda+3$ n'est pas un tel pivot. Je propose le 1 situé en bas à gauche. On réalise alors les opérations $L_1 \leftarrow L_1-(\lambda+3)L_3$ et $L_2 = L_2-2L_3$. On développe ensuite par rapport à la première colonne, puis on factorise (c'est l'objectif final !) une chose que l'on voit sur la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\chi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 4 & -10 \\ 2 & \lambda+5 & -10 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4(\lambda+2) & -\lambda^2+5\lambda+14 \\ 0 & \lambda-3 & 6-2\lambda \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -4(\lambda+2) & -\lambda^2+5\lambda+14 \\ \lambda-3 & 6-2\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} -4(\lambda+2) & -\lambda^2+5\lambda+14 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\underbrace{\left(8(\lambda+2)-\left(-\lambda^2+5\lambda+14\right)\right)}_{=\lambda^2+3\lambda+2} = (\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_C(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+1) \text{ donc } \mathrm{Sp}(C) = \{3,-1,-2\}}$$

4. Mêmes principes que pour le calcul précédent, mais on va pouvoir factoriser $\lambda - 2$ sur deux lignes :

$$\chi_D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda-4 & -\lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-2+\lambda}$$

$$\boxed{\chi_D(\lambda) = (\lambda-2)^3 \text{ donc } \mathrm{Sp}(D) = \{2\}}$$

5. Pas très sympa ce déterminant. Prenons le moins mauvais pivot : en haut à droite il permettra de faire aparaître gratuitement un zéro en position $(2,3)$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. L'opération $L_3 \leftarrow 3L_3 - (X+1)L_1$ va multiplier le déterminant par 3 (d'où la factorisation par 1/3), qui sera tout de suite neutralisée lors du développement selon la troisième colonne (le calcul qui suit n'a d'intérêt que si vous le faites partiellement : je zappe des passages !) :

$$\chi_E(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 & 3 \\ -4 & \lambda+2 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 & 3 \\ 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -3+5\lambda-\lambda^2 & 5-4\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3+5\lambda-\lambda^2 & 5-4\lambda \end{vmatrix}}_{-(5-4\lambda)-(-3+5\lambda-\lambda^2)}$$

et puisque $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$:

$$\boxed{\chi_E(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) \text{ donc } \mathrm{Sp}(D) = \{2, -1\}}$$

6. Ici, on peut raisonnablement développer par rapport à la première colonne, qui contient un zéro :

$$\chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -1 \\ 0 & \lambda+4 & 2 \\ -4 & -12 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\Big(\underbrace{(\lambda+4)(\lambda-5)+24}_{\lambda^2-\lambda+4} - 4 \underbrace{(-6+(\lambda+4))}_{\lambda-2} \Big)$$

soit finalement :

$$\boxed{\chi_F(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \text{ donc } \mathrm{Sp}(F) = \{0,1,2\}}$$

7. Face à ce type de matrice vous pourrez bientôt dire : *« le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur la diagonale »*. De fait, le calcul du polynôme caractéristique est instantanné puisqu'il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire, donc qui est égal au produit des termes diagonaux.

$$\boxed{\chi_G(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \text{ donc } \mathrm{Sp}(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}}$$

Si les λ_i ne sont pas distincts, le spectre sera de cardinal 2 *voire* 1.

8. Il serait raisonnable de choisir une ligne/colonne avec beaucoup de zéros ou bien de pivoter par exemple par rapport à la deuxième ligne via $L_1 \mapsto L_1 + XL_2$... mais très exceptionnellement, choisissons la colonne avec le moins de zéros ! Chacun des déterminnts qui suivra se calule très bien !

$$\begin{aligned} \chi_H(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+a_3 \end{vmatrix} \\ &= -a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-1} + a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\lambda} - a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-\lambda^2} + (\lambda+a_3) \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}}_{\lambda^3} \end{aligned}$$

Surprenant non ?

$$\boxed{\chi_H(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \lambda^4}$$

Et il n'y a pas grand chose à dire sur les racines de ce polynôme très générique !

2 Des sous-espaces propres

1. Pour A : $\mathrm{Mat}(u - 2\mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (deux colonnes/lignes proportionnelles, ou un tour de pivot), donc est non inversible, donc $u - 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective donc pas injective. Plus

précisément, le noyau de $u-2\mathrm{Id}_E$ est de dimension $2-1=1$, et contient visiblement $f_1=(-4,1)$ puisque $\begin{pmatrix}15 & 60\\ -5 & -20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ (autre point de vue : la matrice de $v=u-2\mathrm{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$ nous indique que $v(e_2)=4v(e_1)$, donc $v(e_2-4e_1)=0$... et si on ne voit vraiment rien, on résout $(A-2I_2)X=0$).

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(f_1),\text{ avec } f_2=(-4,1).}$$

De la même façon, $\mathrm{Mat}(u+3\mathrm{Id}_E,\mathcal{E})=\begin{pmatrix}20 & 60\\ -5 & -15\end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u+3\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(f_2),\text{ avec } f_2=(-3,1).}$$

J'ai laissé ici la rédaction du DS. Si on ne voit rien, on doit être capable de déterminer les sous-espaces propres en résolvant un système linéaire sans la moindre fantaisie ou initiative malheureuse. Pour $\lambda=2$, voila ce que ça donne :

Soit $f=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (vous savez que si vous avez fixé f dans $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$ c'est fichu d'avance, n'est-ce pas ?)

Notons donc $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle A représente u :

$$f\in\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})\iff(A-2I_2)X=0\iff\begin{cases}15x+60y=0\\ -5x-20y=0\end{cases}\iff x+4y=0\iff x=-4y$$

ainsi $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})=\{(-4y,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\})=\mathrm{Vect}(f_1)$ avec $f_1=(-4,1)$.

2. Pour B : comme indiqué dans le correctif on se fiche de la valeur précise des valeurs propres distinctes, disons λ_1 et λ_2. Chaque espace propre est le noyau d'un endomorphisme non inversible (pourquoi ?) mais également non nul (pourquoi ?) donc de rang 1. On est donc face à deux droites distinctes (pourquoi ?), donc supplémentaires.

$$\boxed{\mathbb{C}^2=\mathrm{Ker}\,(u-\lambda_1\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}\,(u-\lambda_2\mathrm{Id}) : u\text{ (mais aussi } B\text{) est diagonalisable.}}$$

3. Pour C : à chaque fois on prend $f=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et on définit $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

— Pour $\lambda=3$: une fois sous forme de système on a l'audace de placer la dernière équation en première position et même de prendre son opposé, histoire d'avoir un pivot très civilisé. La remontée du système qui conclut la résolution se fait comme toujours de bas en haut comme son nom l'indique !

$$\begin{aligned}f\in\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})&\iff(C-3I_3)X=0\iff\begin{cases}-6x-4y+10z=0\\ -2x-8y+10z=0\\ -x-4y+5z=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}x+4y-5z=0\\ 20y-20z=0\\ 0=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-4y+5z=z\\ y=z\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})=\{(z,z,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(f_1)\text{ avec } f_1=(1,1,1)}$$

— Pour $\lambda=-1$: on peut voir (deux lignes égales) que le rang de $C+I_3$ est 2 donc le noyau sera une droite. De façon succinte (avec à nouveau le pivot qui va bien dès le début et en notant que deux lignes sont égales) :

$$f\in\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id})\iff\begin{cases}x+4y-9z=0\\ -2x-4y+10z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+4y-9z=0\\ 4y-8z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-4y+9z=z\\ y=2z\end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(f_2)\text{ avec } f_2=(1,2,1)}$$

— Pour $\lambda=-2$:

$$f\in\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id})\iff\begin{cases}-x-4y+10z=0\\ -2x-3y+10z=0\\ -x-4y+10z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+4y-10z=0\\ 5y-10z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-4y+10z=2z\\ y=2z\end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(f_3)\text{ avec } f_3=(2,2,1)}$$

Les 5/2 savent que les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, donc peuvent annoncer dès maintenant que la somme (donc directe !) de ces trois droites est de dimension 3, donc égale à $\mathbb{R}^3$ et ainsi :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$$

Les 3/2 auront certainement établi que le rang de (f_1, f_2, f_3) vaut 3, donc cette famille constitue une base de $\mathbb{R}^3$, donc les sous-espaces engendrés par ces trois vecteurs sont de somme directe égale à $\mathbb{R}^3$.

4. Pour D : il y a une seule valeur propre, donc un seul sous-espace propre : $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$. En ouvrant les yeux on peut voir que la matrice $D-2I_4$ est de rang 2 donc que le noyau est de dimension 2 ; et puisque $C_2 = -2C_1$ et $C_1 = C_3$ (par exemple) on trouve facilement deux vcteurs non colinéaires du noyau, en constituant donc une base : $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$. Mais si on ne le voit pas ce n'est pas grave : en pivotant dans la résolution de $(u - 2\mathrm{Id})(f) = 0$ on trouve directement que

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2) \text{ avec } f_1 = (2, 1, 0) \text{ et } f_2 = (1, 0, -1) \text{ donc } u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

3 Une grosse matrice

1. On cherche les λ tels que $\det(J - \lambda I_7) = 0$. Mais comme il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire (voir matrice G plus haut), ce n'est pas trop compliqué...

$$\boxed{\text{Comme } J \text{ est triangulaire, son spectre } \textit{se lit sur la diagonale} : \mathrm{Sp}(J) = \{2, 3, -1\}}$$

2. — Pour $\lambda = 2$:

$$J - 2I_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & & -3 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & -3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 5 (5 colonnes échelonnées : cet argument sera valable pour tous les rangs de cet exercice) et on visualise deux habitants du noyau de $u - 7\mathrm{Id}$: e_1 et e_2 (les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^7$). Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)}$$

Si on élève $J - 2I_7$ au carré, tout va se passer dans les trois blocs diagonaux : le premier reste égal à 0. Les deux autres seront des matrices triangulaires à coefficients diagonaux non nuls (9 et 1). Le rang de la matrice sera donc inchangé, ainsi que la présence de e_1 et e_2 dans le noyau. Ceci restera valable pour toutes les puissances ultérieures.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 1, \mathrm{Ker}\,\left((u - 2\mathrm{Id})^k\right) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)}$$

— Pour $\lambda = 3$:

$$J - 3I_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & & & \\ 0 & -1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & -4 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 6 et on visualise $e_3 \in \mathrm{Ker}\,(u - 7\mathrm{Id})$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u - 3\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_3)}$$

Si on élève $J - 3I_7$ au carré, le premier et le dernier bloc ont un comportement déjà vu : ils restent triangulaires à coefficients diagonaux non nuls. Par contre il y a un changement dans le deuxième bloc : il s'annule (on partait d'une matrice nilpotente d'indice deux, essentiellement) :

$$(J-3I_7)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 16 & \star & \star \\ & & & & 0 & 16 & \star \\ & & & & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Au delà du rang 2 les puissances seront toutes de cette forme, et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ \text{Ker}\ \big((u-3\text{Id})^k\big) = \text{Vect}(e_3, e_4)}$$

— Pour $\lambda = -1$:

$$J + I_7 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & & & & & \\ 0 & 3 & & & & & \\ & & 4 & 1 & & & \\ & & 0 & 4 & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déjà :

$$\boxed{\text{Ker}\ (u + \text{Id}) = \text{Vect}(e_5)}$$

On comprend aussi ce qui va se passer lors des calculs de puissances successives :

$$\boxed{\text{Ker}\ \big((u+\text{Id})^2\big) = \text{Vect}(e_5, e_6) \text{ et pour tout } k \geqslant 3,\ \text{Ker}\ \big((u+\text{Id})^k\big) = \text{Vect}(e_5, e_6, e_7)}$$

k	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = -1$
1	2	1	1
2	2	2	2
3	$\vdots$	2	3
4	$\vdots$	$\vdots$	3
5	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dimension de Ker $\big((u - \lambda\text{Id})^k\big)$

Salut, mec; une petite idée quant aux éléments propres de [[17, 60], [-5,-18]] ?

Salut ! Tu cherches les **éléments propres** (ou valeurs propres) de la matrice $\begin{bmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}$.

Pour cela, il faut résoudre l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

où A est la matrice donnée, λ est une valeur propre et I est la matrice identité.

Je vais calculer cela pour toi.

Les éléments propres (valeurs propres) de la matrice $\begin{bmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$.

Il me faudrait aussi les vecteurs propres s'il te plait !

Pas de problème ! Je vais calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}$ sont :

- Pour $\lambda_1 = 2$, le vecteur propre est $\begin{bmatrix} 0.9701 \\ -0.2425 \end{bmatrix}$.
- Pour $\lambda_2 = -3$, le vecteur propre est $\begin{bmatrix} -0.9487 \\ 0.3162 \end{bmatrix}$.

Tu dis «le» vecteur propre. Es-tu certain de l'unicité ?

Excellente question !

En fait, les vecteurs propres ne sont **pas uniques**. Si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à une valeur propre λ, alors tout multiple scalaire non nul de $\mathbf{v}$ est aussi un vecteur propre associé à λ. En d'autres termes, les vecteurs propres sont déterminés à un facteur de proportionnalité près.

Donc, quand je dis "le vecteur propre", je fais référence à une version **normalisée** de celui-ci (de norme unitaire). On pourrait multiplier ces vecteurs par n'importe quel scalaire et obtenir d'autres vecteurs propres valides.

Je ne suis pas complètement certain qu'ils soient unitaires !

Tu as raison de douter, car je n'ai pas vérifié explicitement si les vecteurs propres que j'ai donnés étaient normalisés (de norme unitaire). Je vais calculer les normes de ces vecteurs pour vérifier s'ils sont bien unitaires.

Les vecteurs propres que j'ai fournis sont bien **unitaires**. Leurs normes sont toutes égales à 1. Ils représentent donc des versions normalisées des vecteurs propres.

Pourrais-tu donner le détail de ta norme ?