

# Corrigé Centrale PC 2 : Opérateur de différence

## I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

### I.A - L'opérateur de translation

**I.A.1)** Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ , un polynôme non nul de  $\mathbb{R}_n[X]$ , de degré  $d = \deg(P)$  (i.e.  $a_d \neq 0$ ). Alors,  $\tau(P)$  est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme  $a_d \neq 0$  :

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)$$

**I.A.2)** Notons que  $\tau^0(P) = P$ .

Et que si  $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$ , alors  $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$ . Ainsi, par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P)(X) = P(X+k)$$

**I.A.3)** D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable  $i = h+1$ ),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

$M$  est donc triangulaire supérieure et les coefficients de  $M$  vérifient donc

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**I.A.4)** La matrice  $M$  est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres  $\binom{j-1}{j-1} = 1$ .

Comme  $M$  et  $\tau$  ont les mêmes valeurs propres,

$$\text{Sp}(\tau) = \{1\}$$

Si  $M$  était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.

Ainsi,

$$M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}$$

**I.A.5)** 0 n'étant pas valeur propre de  $\tau$ ,

$$\tau \text{ est bijective}$$

Puis si on considère  $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$ ,

on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Il vérifie :  $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{id}$  :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(\bar{\tau}(P))(X) = \bar{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\bar{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$ .

Donc la formule est toujours vraie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X+k)$$

**I.A.6)** Avec l'expression de  $\tau^{-1}$ , on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**I.A.7)** La  $k+1^{\text{e}}$  ligne du calcul  $V = Q \times U$  est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) :  $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$Q = M^T$$

**I.A.8)**  $M$  est inversible, donc  $Q = M^T$  également et  $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$ .

Puis par équivalence :  $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$ .

La  $k+1^{\text{e}}$  ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1})^T)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1}))_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^n ((M^{-1}))_{j+1,k+1} v_j$$

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

**I.A.9)** On a alors

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$$

On vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1) - 1)^k = u_k$$

## I.B - L'opérateur de différence

**I.B.1)** Avec les mêmes notations qu'en 1.A.1), avec  $P$  non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme  $a_d \neq 0$  :

$$\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)$$

**I.B.2)** D'après la question précédente, si  $P$  n'est pas constant,  $\deg(P) \geq 1$  et  $\deg(\delta(P)) \geq 0$ , donc  $\delta(P)$  n'est pas nul. Ainsi, si  $\delta(P) = 0$ , alors  $P$  est constant.

Réciproquement, si  $P$  est constant, le calcul (simple) donne  $\delta(P) = 0$ .

Donc

$$\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

La question précédente montre aussi que  $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Or d'après le théorème du rang :  $\dim(\text{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ .

Donc :

$$\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

**I.B.3)** Si  $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ , avec  $j < n$ .

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leq (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Si  $P \in \text{Im}(\delta^j)$ , alors il existe  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P = \delta^j(Q)$ .

Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que  $\deg P = \deg(Q) - j$ , donc  $\deg(P) \leq n - j$ .

Par conséquent,  $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$ , et donc  $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$ .

Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

**I.B.4)** Notons  $\Delta$ , la matrice de  $\delta$  dans la base  $(P_k)$ .

Par construction de  $\delta = \tau - \text{id}$ , on a  $\Delta = M - I_{n+1}$ .

Puis comme  $M$  commute avec  $I_{n+1}$ , alors d'après la formule de Newton :  $\Delta^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j$ .

Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

**I.B.5)** Si  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$ , alors  $\delta^n(P) = 0$ . Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = \left[ \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

*il s'agit bien du polynôme nul.*

Et en particulier en la valeur réelle  $X = 0$  :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0$$

**I.B.6)** a)  $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$ .

Donc

$$u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}$$

b) Soit  $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$ , alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc  $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$ .

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  vérifie  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $a = d$  et  $c = 0$ , ainsi  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , puis  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ , et ainsi nécessairement  $a = 0$ , puis  $2ab = 0$ ; ce qui est contradictoire avec  $ab = 1$ .

Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque  $\mathbb{R}_1[X]$  est stable par  $u$ , notons  $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$ .

Considérons alors  $A$ , la matrice de  $\tilde{u}$  dans la base  $(P_1, P_2)$  de  $\mathbb{R}_1[X]$ .

Alors  $A^2$  est égale à la matrice de  $\delta$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$  donc  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

**I.B.7)** a) On a vu (questions I.B.3)) que  $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$ .

Ainsi, la famille  $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$  est une famille de degré échelonné (de  $d$  à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit  $V$  stable par  $\delta$ .

Si  $P \in V$ , alors  $\delta^i(P) \in V$  et donc  $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^n(P)) \subset V$ .

*Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...*

$V$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Notons  $d = \dim(V) - 1$ .

Notons  $(e_0, \dots, e_d)$  une base de  $V$ . Nécessairement, l'un des  $e_i$  est un polynôme de degré supérieur ou égal à  $d$ .

Sinon, on aurait une famille libre de  $d + 1$  vecteurs de  $\mathbb{R}_d[X]$ , ce qui est impossible.

Donc il existe  $P$  dans  $V$  de degré  $r \geq d$ .

Si  $\deg P = r > d$ , alors d'après la remarque précédente,  $\mathbb{R}_r[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^r(P)) \subset V$  et  $V$  ne peut être de dimension  $d + 1$ . Donc il existe  $P$  de degré  $d$  dans  $V$  et  $\mathbb{R}_d[X] \subset V$  et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

## II Applications en combinatoire

### II.A - Quelques cas particuliers

**II.A.1)** Si  $\varphi$  est une surjection de  $E$  sur  $F$ , alors nécessairement  $\#F \leq \#E$ . Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal  $n$  sur un ensemble de cardinal  $n$  est en fait une bijection. Donc

$$S(n, n) = n!$$

II.A.3) Les surjections de  $\mathbb{N}_{n+1}$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de deux éléments de  $\mathbb{N}_{n+1}$  qui auront la même image :  $\binom{n+1}{2}$  possibilités
- Puis, la distribution des  $n$  éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les  $n$  éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) :  $n!$  possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

## II.B - Recherche d'une expression générale

II.B.1) *Le résultat ne fait pas partie du programme. Il faut le démontrer.*

Une application de  $E = \mathbb{N}_p$  sur un ensemble  $F = \llbracket 1, n \rrbracket$  est parfaitement définie -et de manière unique- par la donnée pour chacun des  $p$  éléments de  $E$  d'un unique élément de  $F$ . Donc pour chacun des  $p$  éléments de  $E$ , il y a  $n$  possibilités.

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ est donc } n \times n \cdots \times n = n^p$$

II.B.2) Notons  $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$ . Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \#I_k$$

Il reste à dénombrer  $I_k$ . Or les applications  $\varphi$  de  $I_k$  sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de  $k$  éléments de  $\mathbb{N}_n$  qui forment  $\varphi(\mathbb{N}_p)$  :  $\binom{n}{k}$  possibilités
- Puis, le choix des surjections de  $\mathbb{N}_p$  sur l'ensemble  $\varphi(\mathbb{N}_p)$  à  $k$  éléments :  $S(p, k)$  possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

avec la convention  $S(p, 0) = 0$ .

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en I.A.8), ( $p$  constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec  $v_n = n^p$ ,  $u_k = S(p, k)$ , donc

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.B.4) Pour  $p < n$ , le polynôme  $P = X^p$  appartient à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , donc d'après I.B.5),

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.C) Avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

### III Etude d'une famille de polynômes

#### III.A - Généralités

III.A.1) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg(H_k) = k$ .

Donc la famille  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une famille de degrés échelonnés, donc elle est libre. Elle est constituée de  $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$  éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Donc

$$(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]$$

III.A.2)  $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$ .

Et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \delta(H_k)(X) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \left( \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) = \frac{1}{k!} \left( (X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \\ \delta(H_k) &= \frac{1}{k!} \left( \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{k!} \left( \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \times k = H_{k-1} \end{aligned}$$

Bilan :

$$\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(H_k) = H_{k-1}$$

III.A.3) Comme  $\delta = \tau - \text{id}$ , on a alors  $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$  et  $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$ . Ainsi  $M'$  est exactement la matrice de  $\tau$  dans la base  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  de  $\mathbb{R}_n$ .

Par conséquent,

$$M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}$$

III.A.4) Pour tout  $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a (par récurrence pour  $\ell \geq k$ ) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si } \ell \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme  $h \neq 0$ ,  $H_n(0) = 0$  et  $H_0(0) = 1$ .

Par conséquent :

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

III.A.5) Puisque  $(H_k)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , il existe  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que  $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$ .

Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k$$

### III.B - Étude d'un exemple

III.B.1) Notons  $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ .

Il s'agit de calculer  $\delta^k(T)(0)$ , pour  $k$  de 0 à 3. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7, \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8, \delta^2(T)(X) = 6X + 10, \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc

$$T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

III.B.2) Puisque  $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$ , alors par linéarité :

$$\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

III.B.3) Considérons  $(p_n)$  une solution particulière.

Toute autre solution  $(u_n)$  vérifie :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k &= (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k) \\ &= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0 \end{aligned}$$

Donc la suite  $(u-p)_n$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ ,

et il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$

Reste à trouver une solution particulière. On a vu que  $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$ .

Avec  $P$  tel que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$  et  $p_k = P(k)$ , on a une solution particulière.

Enfin, comme pour  $k \geq h$ ,  $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots(k-h+1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$ , et pour  $k < h$ ,  $H_k(h) = 0$ ; on a

$$\text{il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } k \in \mathbb{N}, u_k = A + Bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}$$

avec convention :  $\binom{k}{h} = 0$  si  $h > k$

### III.C - Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.

Si  $k < 0$ , en notant  $p = -k$ , on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-p-1)\dots(-p-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ (-1)^n \binom{n-1-k}{n} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisque'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $H_n(k) \in \mathbb{Z}$ .

$$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$$

III.C.3) Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

$$\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)$$

**III.C.4)** Si  $P$  est à valeurs entières sur les entiers,

alors par récurrence (sur  $h \in \mathbb{N}$ ), pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$ ;

et donc en particulier  $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$ , et les coordonnées de  $P$  dans la base  $(H_k)$  sont des entières.

Réciproquement, si les coordonnées de  $P$  dans la base  $(H_k)$  sont des entières,

alors  $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$ , puis  $P(k) = \sum_{i=0}^d a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$  (combinaison linéaire d'entiers).

Bilan :

$P$  est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans  $(H_k)$  sont entières

**III.C.5)** Supposons que  $P$ , de degré  $d$ , est à valeurs entières sur les entiers,

Alors d'après les questions précédentes, il existe  $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$  tels que  $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$ .

Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^d a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^d \left( a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (X-j) \right)$$

Il s'agit bien d'un polynôme  $d!P$  à coefficients entiers.

Comme le montre le polynôme  $P = \frac{1}{2}X^2$ , de degré 2 :

on a  $2!P$  à coefficients entiers, mais  $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

La réciproque est donc fausse.

## IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

### IV.A -

**IV.A.1)**  $x \mapsto x+1$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par composition,  $x \mapsto f(x+1)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Puis par addition

$\delta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}_+^*$

Puis pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\delta(f')(x) = f'(x+1) - f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

Donc

$$\delta(f') = (\delta(f))'$$

**IV.A.2)** Même démonstration qu'en I.B.4),

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

**IV.A.3)** Soit  $x > 0$ .

Appliquons le théorème des accroissements finis à  $f$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[x, x+1]$ ,

$$\exists c \in ]x, x+1[ \text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = f'(c) \times (x+1-x) = f'(c)$$

En faisant le changement de variable  $y_1 = c - x$ ,

pour tout  $x > 0$ , il existe  $y_1 \in ]0, 1[$  tel que  $\delta(f)(x) = f(x+y_1)$

**IV.A.4)** Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$\mathcal{P}_n$  : «  $\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in ]0, n[$  tel que  $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$  »

— La réponse de IV.A.3) montre que  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

— Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\mathcal{P}_n$  est vraie.  
Soit  $x > 0$ , il existe  $y_n \in ]0, n[$  ( $\mathcal{P}_n$  à  $\delta f$ ) tel que :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x + y_n)$$

Puis par commutation de l'opération différence et dérivation :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x + y_n) = \delta(f^{(n)})(x + y_n) = f^{(n)}(x + y_n + 1) - f^{(n)}(x + y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à  $f^{(n)}$ , il existe  $c \in ]x + y_n, x + y_n + 1[$  tel que

$$f^{(n)}(x + y_n + 1) - f^{(n)}(x + y_n) = (f^{(n)})'(c) \times ((x + y_n + 1) - (x + y_n)) = f^{(n+1)}(c)$$

Enfin, d'après IV.A.2) :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(c)$$

En prenant  $y_{n+1} = c - x$ , alors  $y_{n+1} \geq x + y_n - x \geq y_n \geq 0$  et  $y_{n+1} \leq x + y_n + 1 - x \leq y_n + 1 \leq n + 1$ .  
Ainsi, on a donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  qui est vérifiée.

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in ]0, n[ \text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n)$$

## IV.B -

IV.B.1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Il existe  $p_1, \dots, p_i$ ,  $i$  nombres premiers et  $a_1, a_2, \dots, a_i \in \mathbb{N}$  tel que  $k = \prod_{j=1}^i p_j^{a_j}$ .

On a alors

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^\alpha)^{a_j}$$

Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc

$$k^\alpha \text{ est un nombre entier naturel}$$

IV.B.2) Si  $\alpha < 0$ , alors

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

Or on a vu que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$ , donc  $k^\alpha \geq 1$ . On a une contradiction,

$$\alpha \in \mathbb{R}_+$$

IV.B.3) Si  $\alpha$  est un entier naturel, alors  $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$  et donc  $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$ ;

donc l'une au moins des dérivées de  $f_\alpha$  s'annule en au moins un réel strictement positif.

Réciproquement, s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_0 > 0$  tels que  $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$ ;

or on sait que pour tout réel  $x$ ,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Donc si  $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$ , alors comme  $x_0 > 0$ , on a nécessairement :  $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = 0$ ;  
et donc il existe  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $\alpha - k = 0$  donc  $\alpha = k \in \mathbb{N}$ . Ainsi :

$$\alpha \in \mathbb{N} \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$$

## IV.C -

IV.C.1) D'après IV.B.1), pour tout  $k$  entier,  $k^\alpha \in \mathbb{N}$ ,

donc pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$  puisque  $x$  entier.

Puis par stabilité par multiplication et additions d'entiers :

$$\boxed{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}}$$

IV.C.2) On applique directement la relation (IV.1.) :

$$\exists y_n \in ]0, n[ \text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}}$$

Donc comme  $y_n \geq 0$ ,

$$0 \leq \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \leq \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{x^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

IV.C.3) Comme cette limite pour  $x \rightarrow +\infty$  est nulle, on peut prendre  $\epsilon = \frac{1}{2}$  ; il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $x \geq A$  et entier :  $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Or cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.

Ainsi, pour tout  $x \geq A$ ,  $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = 0 = f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$ .

Donc, une dérivée de  $f_\alpha$  s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après IV.B.3),

$$\boxed{\alpha \text{ est donc un entier naturel}}$$