Banque « Agro-Véto »
AT - 0513

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Les exercices et problème sont indépendants.

Exercice : Étude d'une suite numérique

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = e - 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \end{cases}$.

1. Écrire un algorithme qui, pour tout entier naturel n, calcule la valeur de u_n .
L'algorithme peut être rédigé en français ou dans tout langage connu par la candidat, l'algorithme peut utiliser une constante prédéfinie nommée e *qui contient la valeur de la constante mathématique* e.

2. Étude mathématique de la suite u .

2.1 Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$.

2.2 Montrer que la suite u est positive et décroissante.
En déduire que la suite u converge.

2.3 Montrer que pour tout entier naturel n : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

2.4 Déterminer la limite de la suite u .

3. Recherche d'un équivalent de u_n .
On définit les suites (S_n) et (S'_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,,\ \mathrm{S}'_n = \mathrm{S}_n + \frac{1}{n.n!}\ .$$

3.1 Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_n = n!\,(\mathrm{e} - \mathrm{S}_n)$.

3.2 Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

3.3 En déduire que les suites (S_n) et (S'_n) convergent vers la même limite.

3.4 Déterminer la limite commune des suites (S_n) et (S'_n) .

3.5 Déduire de l'étude précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e} - \mathrm{S}_n \leqslant \dfrac{1}{n.n!}$.

3.6 Montrer alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1$, autrement dit que : $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice : Faire le bon pari

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D1 et D2.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- nous commençons par jeter la pièce,
- si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D1, sinon nous choisissons le dé D2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- ensuite nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les évènements suivants :

- D1 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D1 »,
- D2 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D2 »,
- pour tout entier naturel n, R_n est l'évènement : « nous avons obtenu une face rouge au $n^{\text{ème}}$ lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $\mathrm{P}(\mathrm{D}_1)$? $\mathrm{P}(\mathrm{D}_2)$?
Montrer que $\{\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2\}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs de $\mathrm{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_n)$? de $\mathrm{P}_{\mathrm{D2}}(\mathrm{R}_n)$?

3. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{R}_1)$.

4. Établir un lien entre les probabilités $\mathrm{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1)$, $\mathrm{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_2)$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{D1}}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$.
En déduire la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$.

5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{R}_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}} .$$

En déduire pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathrm{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1})$.

6. Calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2}(\mathrm{D}_1)$,
puis de manière générale, pour tout entier naturel non nul n , montrer que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{R}_n}(\mathrm{D}_1) = \frac{2^n}{2^n + 2} .$$

7. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-t-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D1 ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?

Problème : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M .

Considérons la matrice A définie par : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)$.

1.1 Calculer A puis A^2.

1.2 Exprimer la matrice M en fonction de la matrice A.

1.3 Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n \mathrm{A}$.

Nous rappelons que : $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3$.

1.4 Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que : $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n \mathrm{A}$.

La preuve mettra en avant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = -3\, u_n + 4$.

1.5 Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = u_n - 1$.

1.5.1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

1.5.2 En déduire pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.

1.5.3 En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

1.6 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M .

2.1 Montrer qu'il existe une unique matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{M} = 4\mathrm{J} - 3\mathrm{I}_3$.

2.2 Calculer J^2, puis pour tout entier naturel non nul n , J^n .

2.3 Soit n un entier naturel non nul.

2.3.1 Énoncer la formule du binôme. *Aucune preuve n'est attendue.*

En remarquant que : $(4\mathrm{J}) \times (-3\mathrm{I}_3) = (-3\mathrm{I}_3) \times (4\mathrm{J})$, nous admettrons que la formule du binôme s'applique au développement de $(4\mathrm{J} - 3\mathrm{I}_3)^n$.

2.3.2 Montrer que : $\mathrm{M}^n = (-3)^n \mathrm{I}_3 + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) \mathrm{J}$.

2.3.3 Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.

2.3.4 En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J ,
puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2.4 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

3. Une dernière méthode de calcul des puissances de M .
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$,
et introduisons alors l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{E}$ est la matrice M .

3.1 Déterminer les valeurs propres de f ,
et déterminer pour chaque valeur propre de f , une base du sous-espace propre associé.

Dans la suite du problème, $\vec{v_1}$ désigne le vecteur de la base du sous-espace propre de dimension 1 déterminée ci-dessus, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ désignent les deux vecteurs de la base du sous-espace propre de dimension 2 déterminée ci-dessus.

3.2 Montrer que la famille $\mathcal{V} = \left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$,
puis écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{V}$, matrice notée dans la suite D .

3.3 Déterminer une matrice P appartenant à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

3.4 Montrer que pour tout entier naturel n : $\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

3.5 Calculer pour tout entier naturel n, l'expression matricielle de D^n.

3.6 Calculer P^{-1} .

3.7 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

4. Une algèbre de matrices.
Dans cette question, E désigne l'ensemble des matrices R appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\mathrm{R} = \lambda \mathrm{I}_3 + \mu \mathrm{M}$.

4.1 Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Montrer que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{M})$ est une base de E .

4.2 Montrer que M^2 appartient à E et en déduire que le produit de deux éléments de E appartient à E .

4.3 Soit R une matrice appartenant à E . Il existe donc de manière unique deux réels λ et μ tels que : $\mathrm{R} = \lambda \mathrm{I}_3 + \mu \mathrm{M}$.
La matrice P étant celle obtenue à la question **3.**, démontrer que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{RP}$ est diagonale.

***** FIN *****