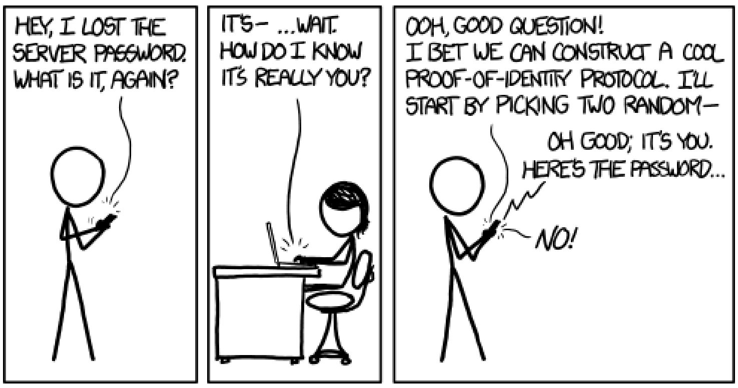
Psi 999 – 2024/2025 **Cours**

Suites et séries de fonctions

« Vous êtes marié, comme moi ; vous savez que la monstruosité peut prendre des formes très diverses. »
– Léodagan

Table des matières



Le premier exercice n'est vraiment pas une farce !

Exercice 1 — *Partons sur de bonnes bases.*

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le réel $\dfrac{x}{n}$ est-il croissant ? décroissant ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $\left(\dfrac{x}{n}\right)_{n>0}$ est-elle croissante ? décroissante ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{n}$ est-elle croissante ? décroissante ?

1 Différents modes de convergence

DÉFINITION 1 — *Suite de fonctions, convergence simple*

Une **suite de fonctions** est... une suite de fonctions ! On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur A **converge simplement** vers la fonction f lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

EXEMPLE : La suite de fonction $(f_n)_{n>0}$ définie pour tout $n > 0$ par $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{n}$ converge simplement vers la fonction nulle.

1.1 Quelques exemples

EXEMPLE : On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

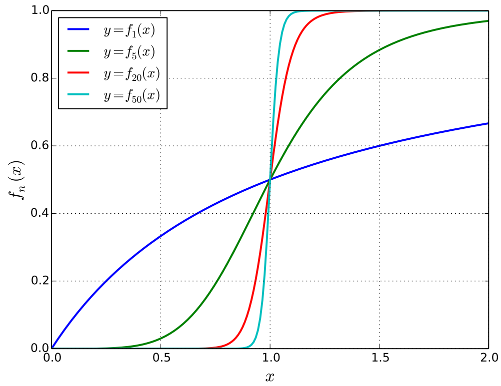


FIGURE 1 – $\frac{x^n}{1+x^n}$ pour $n \in \{1, 5, 20, 50\}$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$

REMARQUES :

— On voit dès maintenant qu'*une limite simple de fonctions continues peut ne pas être continue.*

— Si on fixe x et $\varepsilon > 0$, on aura, pour n assez grand, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Mais même pour N arbitrairement grand (mais fixé !), on peut trouver des x tels que $|f_N(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{4}$: il suffit de prendre des x assez proches de 1. Ainsi, dans le « $\forall x \forall \varepsilon, \exists N > 0; \dots$ », le N dépend évidemment de ε (difficile de faire autrement), mais aussi (et ça, on aurait bien aimé que ce soit faux) de x : il n'est pas « uniforme ».

EXEMPLE : [CCP 2008] On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$: $f_n(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{n+x}{x}\cdot$ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers la fonction constante égale à $\dfrac{\pi}{2}\cdot$

On termine avec ce qu'on appellera bientôt une *série* de fonctions...

EXEMPLE : [Centrale 2010] La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction constante égale à 1.

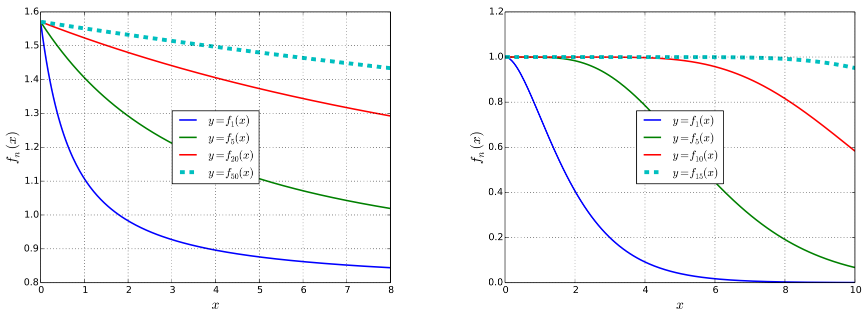


FIGURE 2 – $\operatorname{Arctan}\frac{n+x}{x}$ pour $n \in \{1,5,20,50\}$ et $\mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$ pour $n\in\{1,5,10,15\}$

1.2 Suites de fonctions : convergence simple vs. uniforme

Lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (ce qu'on note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{cv.s.}{\longrightarrow}} f$), on a :

$$\forall x\in A,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N};\qquad n\geqslant N \implies |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Le N dépend ici de ε (on s'en doute...) mais aussi (a priori) de x : dans le cas de $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ si on fixe $\varepsilon>0$, alors si x se rapproche de 1, il faudra prendre N de plus en plus grand pour avoir $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$: ce choix de N n'est plus *uniforme* vis-à-vis de x.

DÉFINITION 2 — *Convergence uniforme*

> Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f (et on note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{cv.u.}{\longrightarrow}} f$) lorsque pour tout $\varepsilon>0$, il existe un rang au delà duquel on a pour tout $x\in A$, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$:
>
> $$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N};\quad \forall x\in A,\qquad n\geqslant N \implies |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Autrement dit (pour peu qu'on note $+\infty$ la borne supérieure d'une fonction non majorée) :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci qui nous conduit à définir une notion raisonnable de *norme*[1] :

DÉFINITION 3 — *Norme de la convergence uniforme*

> Si f est une fonction bornée sur A, on note $\|f\|_\infty$ (ou $\|f\|_{\infty,A}$ en cas d'ambiguïté) la borne supérieure de $|f|$ sur A.

Ainsi, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{cv.u.}{\longrightarrow}} f$ si et seulement si à partir d'un certain rang f_n-f est bornée, et $\|f_n-f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1. *On définit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$: $f_n(x)=x^n$. Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, $[0,1/2]$, $[0,1-\varepsilon]$ (avec $0<\varepsilon<1$) et enfin $[0,1[$.*

THÉORÈME 1 — *Uniforme implique simple*

> Si une suite de fonctions converge uniformément, alors elle converge simplement.

PREUVE : Vous comprenez la signification des quantificateurs ? ■

Attention, il peut y avoir convergence non uniforme sur l'ensemble complet de définition des fonctions, mais tout de même uniforme sur une partie de cet ensemble de définition.

1. Une application de E dans $\mathbb{R}^+$ nulle seulement en 0, vérifiant $N(\lambda f)=|\lambda|\,N(f)$ et $N(f_1+f_2)\leqslant N(f_1)+N(f_2)$, la quantification étant implicite.

Exemples :

— Pour $f_n(x) = \frac{x}{n}$, on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{cv.s.} f = 0$. La convergence ne peut être uniforme sur $\mathbb{R}$ ($f_n - f = f_n$ n'est pas bornée) mais elle l'est sur tout segment $S = [-M, M]$ (puisque $\|f_n - f\|_{\infty,S} = \frac{S}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) et plus généralement sur toute partie bornée.

— Pour $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ la situation (comme pour l'exercice précédent) est très intéressante : $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{2}$ (observer $f_n - f$ au voisinage de 1) donc il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 2]$. Cependant, si on fixe $\varepsilon_0 > 0$ et qu'on note $S = [0, 1-\varepsilon_0]$, alors

$$\|f_n - f\|_{\infty,S} = f_n(1-\varepsilon_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc il y a convergence uniforme sur chaque $[0, 1-\varepsilon_0]$... mais pas sur $[0, 1]$ ou même $[0, 1[$.

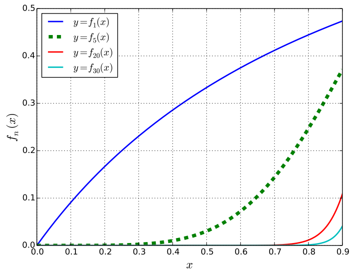


Figure 3 – $\frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0; 0,9]$ pour $n \in \{1, 5, 20, 30\}$

On peut donc avoir une convergence simple, non uniforme sur le domaine complet, mais uniforme sur des sous-domaines qui recouvrent le domaine complet : ce fait va vous pourrir la vie car vous allez lutter contre cette idée !

— De même, pour $f_n(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{n+x}{x}$, on a $\|f_n - f\|_\infty = \frac{\pi}{4}$, mais par contre si on se limite à $I =]0, M]$ avec $M > 0$, on a

$$\|f_n - f\|_{\infty,I} = \left| f_n(M) - \frac{\pi}{2} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $]0, M]$.

— Enfin, la suite [2] de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ne saurait converger uniformément vers sa limite simple (la fonction f constante égale à 1) puisque $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment $[0, M]$.

1.3 Chapeau pointu et bosse glissante

Les deux exemples suivants sont typiques de convergences simples mais non uniformes :

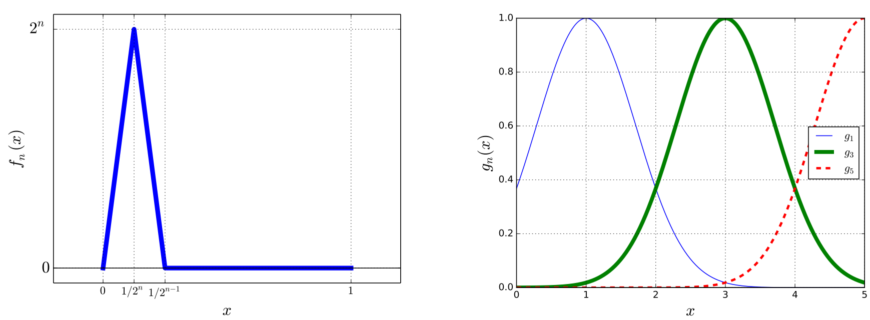


Figure 4 – Chapeau pointu et bosse glissante

2. Qu'on verra bien entendu comme une *série* de fonctions, dès qu'elles auront été définies !

— Le « chapeau pointu » : f_n est affine sur $[0, 2^{-n}]$, $[2^{-n}, 2^{1-n}]$ et $[2^{1-n}, 1]$ avec $f_n(0) = f_n(2^{1-n}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(2^{-n}) = 2^n$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et pourtant $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

— La « bosse glissante » : $g_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$. Ici encore, $(g_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, et pourtant $\|g_n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

1.4 Cas des séries de fonctions : la convergence normale en plus

Dans le cas de suites de fonctions définies comme des sommes partielles de séries, on préférera parler directement de séries de fonctions.

DÉFINITION 4 — *Séries de fonctions*

Une **série de fonctions** $\sum f_n$ est une suite de fonctions de la forme $(g_n) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)$.

Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement* lorsque pour tout x, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. *La convergence est uniforme* lorsque d'une part il y a convergence simple, et d'autre part la suite (de fonctions) des restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers 0.

Exercice 2. *Montrer que* $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.
On aura noté un implicite clair ($n \in \mathbb{N}^*$) et un abus de langage inévitable : on n'a pas parlé de $\sum f_n$ mais de $\sum f_n(x)$...

Exercice 3. *Montrer que si* $\sum f_n$ *converge uniformément, alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers la fonction nulle.*

Exercice 4. *Déterminer la borne supérieure sur* $\mathbb{R}$ *de* $|\cos x + \sin x|$*. Que dire en première approximation de celle de* $\big|\cos(x^2) + \sin(x)\big|$ *?*

Majorer le reste R_n uniformément peut s'avérer casse-pieds. En pratique, il y a une situation très favorable et néanmoins assez fréquente : si on arrive à majorer (indépendamment de x) $|f_n(x)|$ par α_n avec $\sum \alpha_n$ convergente, alors a fortiori, $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et c'est gagné.

DÉFINITION 5 — *Convergence normale*

La série de fonction $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est dite *normalement convergente* si (à partir d'un certain rang, f_n est bornée et) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Bien entendu, la notion est intéressante grâce au résultat suivant :

THÉORÈME 2 — *Normale implique uniforme*

Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément.

PREUVE : Il s'agit de montrer d'abord qu'il y a convergence simple, puis que la fonction R_n est bornée à partir d'un certain rang, et enfin que $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Fixons $x \in A$ (l'ensemble sur lequel on travaille). À partir d'un certain rang f_n est bornée, et on a alors $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |f_n(x)|$ est convergente ; $\sum f_n(x)$ est donc absolument convergente, donc convergente, ce qui donne le premier point (et libère x).
Fixons maintenant à nouveau $x \in A$, n au delà duquel f_n est bornée, et $k \geqslant n$. On a alors $|f_k(x)| \leqslant \|f_k\|_\infty$, donc par inégalité triangulaire, pour $p \geqslant 1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

(pour la dernière inégalité, on a majoré une somme partielle de série positive par la somme totale ; il n'est évidemment pas question d'un passage d'inégalité à la limite...).

Maintenant, dans l'inégalité $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$, le membre de droite est constant (vis-à-vis de p), et celui de gauche tend vers $|R_n(x)|$ lorsque p tend vers $+\infty$, donc on peut passer l'inégalité à la limite, pour obtenir : $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, on obtient même le fait que la fonction R_n est bornée, avec $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.
Dans l'inégalité précédente, le majorant de $\|R_n\|_\infty$ est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui termine la démonstration. ■

1.5 Deux exemples significatifs

Les exemples suivants sont FONDAMENTAUX. Dès qu'on a une bêtise à raconter sur les séries de fonctions, il faut la tester sur ces exemples !
Définissons donc, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n}\cdot$

- La *suite* de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  - converge simplement sur $]-1,1]$;
  - converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon < 1$;
  - ne converge PAS uniformément sur $]-1,1]$ ou même $]-1,1[$.
- La *série* de fonctions $\sum f_n$:
  - converge simplement sur $]-1,1[$;
  - converge normalement donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon < 1$;
  - ne converge PAS uniformément sur $]-1,1[$.
- La *suite* de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et même uniformément sur $[-1,1]$;
- La *série* de fonctions $\sum g_n$:
  - converge simplement sur $[-1,1[$;
  - converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-1, 1-\varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon < 1$;
  - ne converge PAS uniformément sur $[-1,1[$;
  - converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, avec $0 < \varepsilon < 1$;
  - ne converge PAS normalement sur $]-1,1[$.

REMARQUE : En pratique, beaucoup de séries uniformément convergentes sont en fait normalement convergentes (encore plus dans la vraie vie que dans les exercices taupinaux !). Lorsque la convergence est uniforme non normale, on est presque toujours dans une situation comme vue plus haut pour $\sum g_n$ sur $[-1,0]$: alternée. On majore alors la valeur absolue du reste par celle du premier terme...

1.6 Deux exemples complexes simples

Lorsque les fonctions en jeu sont à variable ou valeurs complexes, les notions précédentes restent valables ; il suffit d'écrire la même chose, mais de lire « module » au lieu de « valeur absolue ».

EXEMPLE : La série[3] $\sum z^n$ converge simplement sur le disque ouvert unité. La somme est l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}\cdot$ La convergence n'est pas uniforme ($\|f_n\|_{\infty,D_1} = 1 \not\to 0$, ou encore : $\|R_n\|_{\infty,D_1} = +\infty$).

Un autre exemple fréquent et utile ; qui est (comme le précédent) une « série entière » :

EXEMPLE : La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$. La somme est l'application exponentielle. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{C}$, mais elle l'est sur toute partie bornée.

REMARQUE : Les notions conservent un sens lorsque les fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel muni d'une norme. Typiquement : $\mathbb{R}^n$. Si l'espace est de dimension finie, tout se passe comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si par contre l'espace est de dimension infinie, le résultat fondamental « convergence absolue implique convergence » n'est plus vrai en général. Nous éviterons donc pudiquement ce cas !

Exercice 5. *Déterminer le domaine de convergence (simple) de la série de fonctions complexes* $\sum \frac{1}{n^z}\cdot$

3. Moins lourd que $\sum f_n$, avec $f_n : z \mapsto z^n$...

2 Régularité des limites de suites – interversion de symboles

2.1 Des pathologies à avoir en tête

Que dire d'une limite (simple) d'une suite de fonctions continues ?

EXEMPLE : La suite de fonctions continues définies par $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement vers une fonction discontinue.

Une limite (simple) de fonctions continues n'est pas forcément continue.

Autre point de vue, pour énoncer la bizarrerie, toujours sur l'exemple précédent :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 1^-} f_n(x)\right).}$$

On a un phénomène semblable pour des double-limites au voisinage de $+\infty$:

EXEMPLE : Pour $f_n(x) = \mathrm{Arctan}\frac{n+x}{x}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \frac{\pi}{4}\cdot$

Même quand toutes ces limites existent, on peut avoir :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right)}$$

REMARQUE : On a le même phénomène pour des « suites doubles » : faire tendre n et p vers $+\infty$ (mais dans les deux ordres envisageables) dans $u_{n,p} = \dfrac{n}{n+p}\cdot$

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}\right).}$$

Est-ce que ça se passe mieux pour la dérivabilité ? En supposant que les f_n sont dérivables et que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme, il y a un petit espoir, non ?

EXEMPLE : Si on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais f n'est pas dérivable en 0.

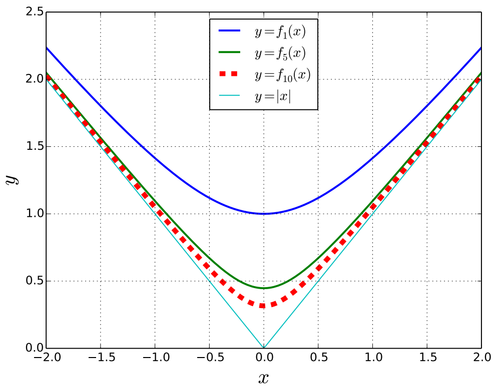


FIGURE 5 – Même avec la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ça ne passe pas

*Même une limite **uniforme** de fonctions dérivables (voire $\mathcal{C}^\infty$) n'est pas nécessairement dérivable.*

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(h)-f_n(0)}{h}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f_n(h)-f_n(0)}{h}\right).}$$

Ici au sens où à gauche, la limite extérieure n'existe même pas !

REMARQUE : En fait, toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes (théorème de Weïerstrass, hors programme) ; c'est dire si on ne peut vraiment rien dire (au delà de la continuité) de la régularité d'une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$!

Enfin, on va voir que ça ne se passe pas mieux pour l'intégration.

EXEMPLE : Pour les fonctions « chapeau pointu » vues plus haut, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, et pourtant $\displaystyle\int_0^1 f_n = 1$ ne tend pas vers l'intégrale de la fonction nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

Lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$, on n'a pas nécessairement $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt.}$$

2.2 Continuité

THÉORÈME 3 — *Limite uniforme de fonctions continues*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant **uniformément** vers f sur $D\subset\mathbb{R}$. Si toutes les f_n sont continues en $x_0\in D$, alors f est également continue en x_0. Autrement dit :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

Il suffit en pratique que la convergence soit uniforme sur chaque segment inclus dans I...

PREUVE : On fixe $\varepsilon>0$, et on va montrer que pour x assez proche de x_0, on a $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$. La clef sera l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |(f(x)-f_n(x))+(f_n(x)-f_n(x_0))+(f_n(x_0)-f(x_0))|\\ &\leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\\ &\leqslant 2\left\|f-f_n\right\|_\infty+|f_n(x)-f_n(x_0)|.\end{aligned}$$

Puisque $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{cv.u.} f$, il existe n_0 tel que $\|f_{n_0}-f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ (et on le fixe ainsi dans la suite). Puisque f_{n_0} est continue en x_0, il existe $\eta>0$ tel que pour $|x-x_0|\leqslant\eta$, on a $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|\leqslant\varepsilon$. On fixe η puis x ainsi. On a alors par l'inégalité triangulaire vue plus haut : $|f(x)-f(x_0)|\leqslant 3\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, ce qu'on souhaitait démontrer (relire la quantification !). ■

REMARQUE : Si on n'écrit pas des mathématiques mais un ramassis informe de quantificateurs et de symboles logiques mystérieux, on peut passer à côté de l'essentiel : le η est associé à n_0 (et pas un n qui dépendrait d'un x variable), et il est crucial qu'on ait $|f_{n_0}(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ **pour tout** x, ce qui aurait été difficile si n_0 devait dépendre de x...

Ce résultat est souvent utilisé via sa contraposée, ce qui évite d'évaluer des $\|f_n-f\|_\infty$:

EXEMPLE : Sur $[0,1]$, $f_n : x\mapsto x^n$ est continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue, donc la convergence n'est pas uniforme.

2.3 Double limite

Il est parfois intéressant de connaître le comportement d'une limite uniforme de fonction non pas en un point de l'intervalle mais au bord de celui-ci (typiquement, $+\infty$).
On a vu que (cf. $\mathrm{Arctan}\frac{n+x}{x}$) qu'on ne pouvait pas faire tendre n et x vers $+\infty$ « en même temps » sans précaution.

Théorème 4 — *Double limite [Vaguement sorti du programme pour les suites mais pas les séries]*

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n possède une limite ℓ_n en a, alors :
- la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
- f possède une limite en a ;
- les limites de f et de $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales :

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{f(x)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)}_{\ell_n}.$$

Preuve (hors programme) : Le point réellement délicat de cette preuve hors-programme est en fait la convergence de $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle utilise la notion de suites de Cauchy, hors-programme. Une fois la convergence de la suite acquise, la fin de la preuve est essentiellement la même que celle du théorème de continuité des limites uniformes. ■

Remarques :
- En pratique, « a adhérent à D » signifiera le plus souvent : $a = 0$ avec $D =]0, M]$ ou bien $a = +\infty$ avec $D = [\alpha, +\infty[$...
- Ce théorème de double-limite (comme la plupart des théorèmes de cette partie), sera surtout intéressant dans sa version « séries » qui sera vue dans la prochaine partie : la limite d'une suite de fonctions est souvent explicitement connue, ainsi que ses régularités. Ce n'est pas le cas pour les séries de fonctions.

2.4 Intégration

On a vu qu'en général, on ne peut pas écrire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$. Le théorème suivant dit qu'en cas de convergence uniforme sur un segment, on peut !

Théorème 5 — *Intégration et limites uniformes*

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ convergeant **uniformément** vers f, alors :

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Preuve : Il suffit de majorer la valeur absolue de la différence par inégalité triangulaire [4] :

$$\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\, dt\right| \leqslant \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leqslant \|f_n - f\|_\infty} dt \leqslant (b-a)\, \|f_n - f\|_\infty\,,$$

et c'est gagné, puisque $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Remarques :
- Il s'agit de l'énoncé officiel au programme, qui réclame la continuité des f_n ; celle de f est alors acquise puisqu'il y a convergence uniforme, et on peut bien parler de l'intégrale de f. En fait, l'énoncé reste vrai si on suppose seulement les f_n continues par morceaux... mais il faut alors vérifier que f l'est aussi ; et la preuve reste la même.
- On verra plus tard le théorème de convergence dominée qui a une conclusion essentiellement de même type, mais des hypothèses de nature différentes. Et ce « TCD » s'appliquera lui sur des intervalles non bornés, ce qui n'est pas le cas pour le théorème précédent (regarder la preuve).

2.5 Dérivabilité

Pour compléter la collection [5] en cours, il nous reste à établir un résultat nous permettant d'écrire :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} (f_n').$$

4. Au sens des intégrales.
5. D'interversions de symboles.

Et on se souvient qu'une limite (même uniforme) de fonctions dérivables n'est pas forcément elle-même dérivable ! Il faut bien voir que le théorème qui va suivre dit surtout : « WOW, la limite est dérivable ! » plutôt que « la dérivée de la limite vaut telle chose ».

Théorème 6 — *Dérivation d'une limite*

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement**, disons vers une fonction f ;
- la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément**, disons vers une fonction g.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ (avec $f' = g$).

Preuve : On va passer par une forme intégrale de f. Commençons par fixer $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, donc pour tout $x \in I$:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt.$$

À x fixé, si on fait tendre n vers $+\infty$, le membre de gauche tend (convergence simple) vers $f(x)$ alors que celui de droite (convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et uniforme de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le segment[6] $[a, x]$) vers $f(a) + \int_a^x g(t)dt$. Ainsi :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse nous assure alors que f est dérivable sur I, de dérivée g. On a déjà vu que g est continue, donc f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$. ■

Si on veut prouver qu'une limite est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut « itérer » le résultat précédent... mais en pratique, pour éviter de prouver des tas de convergences uniformes inutiles, on utilisera plutôt le résultat suivant :

Théorème 7 — *Caractère $\mathcal{C}^k$ d'une limite*

Soient $k \geqslant 1$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telles que :
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f ;
- pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction g_i ;
- la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** sur I vers une fonction g_k ;

Alors :
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $f^{(i)} = g_i$.

Preuve (hors programme) : L'idée est d'appliquer le théorème précédent à la suite $(f_n^{(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$... On sent poindre une récurrence (attention, à k fixé), mais pour cela on a besoin de convergences uniformes des dérivées intermédiaires, donc il faut localiser... Inutile de vous pourrir le cerveau avec ça dans un premier temps[7] ! ■

Remarques :
- Évidemment, si la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *uniforme*, ce n'est pas grave ! Mais ce qui est important, c'est que celle de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le soit (enfin, celle des dernières dérivées dans le cas $\mathcal{C}^k$).
- On ne dira surtout pas « supposons que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' » : on ne sait pas encore que f est dérivable !
- On verra des situations (pour les séries de fonctions) où la convergence uniforme des dérivées est plus simple à établir ; on prouvera alors que la limite est de classe $\mathcal{C}^1$... pour montrer qu'elle est continue !
- Pour montrer qu'une limite est $\mathcal{C}^\infty$, il faudra donc prouver la convergence uniforme des suites $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, au moins pour k assez grand.
- Si on dispose d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur $\mathbb{R}$, avec les dérivées qui convergent uniformément... sur toute partie de la forme $[-M, M]$, alors la limite sera bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, la dérivabilité est une propriété locale : pour montrer la dérivabilité en $x = 999$, on peut travailler provisoirement sur $[-1000, 1000]$. On parle parfois de *localisation*.

6. Ou $[x, a]$...
7. Mais ce n'est pas inintéressant dans un deuxième ou troisième temps, pour ceux qui pensent bien maîtriser l'ensemble du chapitre.

3 Régularité des sommes de séries

Les séries de fonctions étant... des suites de fonctions, il n'y a a priori aucun nouveau résultat ! On va essentiellement *reformuler* les résultats précédents. En pratique, *la plupart* des convergences uniformes seront obtenues par convergence normale.

3.1 Continuité et double limite

THÉORÈME 8 — *Continuité d'une somme de série de fonctions*

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et toutes les f_n sont continues, alors la fonction somme $x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue.

EXEMPLE : La série de fonctions $\sum \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ converge normalement ($\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$) donc uniformément sur $\mathbb{R}$, donc la fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 9 — *Double limite : interversion somme/limite*

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions définie sur I et a est adhérent à I, avec de plus :
- $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{R}$.

Alors :
- la série $\sum \ell_n$ converge ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Bref :

$$\lim_{t \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \to a} f_n(t) \right).$$

REMARQUE : La dernière formulation est plaisante, mais il ne faut pas oublier que les premières informations sont l'existence de la limite lorsque t tend vers a et la convergence de la série !

EXEMPLE : La fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$ tend vers 1 en $+\infty$. En effet, avec $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, on a $\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} = \frac{1}{n^2}$ (tiens, une localisation !) donc $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[2, +\infty[$. Ensuite, $f_n(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\zeta(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1$.

REMARQUE : Dans l'exemple précédent, on note qu'une partie de la conclusion fournie par le théorème (la convergence de la série des limites ℓ_n) n'a que peu d'intérêt : c'est l'existence de la limite de la fonction qui est intéressante.

3.2 Intégration et dérivation terme à terme

THÉORÈME 10 — *Intégration terme à terme d'une somme de série de fonctions*

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur un segment $[a, b]$ et toutes les f_n sont continues, alors la fonction somme $f : x \in [a, b] \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue, la série $\sum \int_a^b f_n$ converge, et enfin :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right).$$

Ou encore :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right).$$

EXEMPLE : Classique :

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\ln x}dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n \ln^n x}{n!}\right) dx.$$

Pour $x \in]0,1]$ (et même $[0,1]$ avec le prolongement qu'on imagine) on a $|x\ln x| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, donc pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{(1/\mathrm{e})^n}{n!}$, puis $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n!}$ donc la série sous l'intégrale converge normalement donc uniformément, ce qui permet d'écrire (la convergence de la série étant fournie par le théorème) :

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n \ln^n x}{n!} dx\right).$$

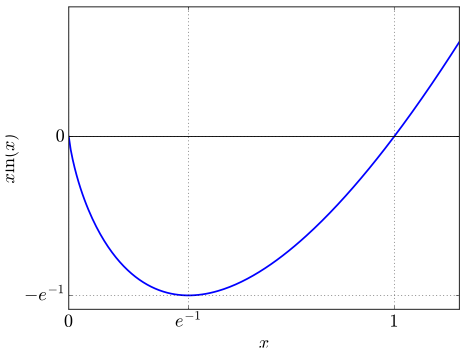


FIGURE 6 – Une fonction usuelle (?)

Après quelques intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ d'où finalement cette formule étrange :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}.$$

THÉORÈME 11 — *Dérivation terme à terme d'une somme de série de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n'$ converge **uniformément** sur I.

Alors :
- l'application somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
- pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Ou encore, avec les précautions d'usage :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

EXEMPLE : L'application $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(3^n x)}{4^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE : Pour montrer qu'une somme de série est de classe $\mathcal{C}^k$, on prouvera la convergence simple de la série initiale et de ses dérivées intermédiaires, et la convergence uniforme de la série des dérivées k-èmes.

3.3 Localisation

Parfois, il n'y a pas convergence uniforme sur l'ensemble du domaine, mais on peut tout de même prouver la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^k$ en *localisant* le problème.

Exercice 6. *Montrer que l'application* $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+n}}{n^2}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Solution : On définit $f_n(x) = \frac{\sqrt{x+n}}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geqslant 0$. On a bien entendu convergence simple de $\sum f_n$ (à x fixé, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$), mais il n'y a pas convergence normale : aucune fonction f_n n'est bornée ! Par contre, si on fixe $A > 0$, on a $\|f_n\|_{\infty,[0,A]} = f_n(A)$, donc il y a convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, A]$. L'application somme S est donc continue sur $[0, A]$, c'est-à-dire en tout $x \in [0, A]$ Mais ceci est valable pour tout $A > 0$, donc finalement, S est continue en tout $x \geqslant 0$, donc sur $\mathbb{R}^+$.

On vient de voir le passage de $[0, A]$ à $\mathbb{R}$, mais c'est pareil pour passer de $[\varepsilon, +\infty[$ à $]0, +\infty[$:

Exercice 7. *Montrer que l'application* $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$.

Solution : Si on définit $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, il y a convergence de $\sum f_n(x)$ pour $x > 0$ ($f_n(x) = o(1/n^2)$) et divergence grossière pour $x \leqslant 0$. Ainsi, l'application somme S est définie sur $]0, +\infty[$.
On a $\|f_n\|_\infty = 1$, donc il n'y a pas convergence normale (ni même uniforme ; pourquoi ?) sur $]0, +\infty[$. Par contre, si on fixe $\varepsilon > 0$, alors $\|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = f_n(\varepsilon)$, donc on a convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur $[\varepsilon, +\infty[$, donc S est continue en tout x de $[\varepsilon, +\infty[$, puis en tout $x > 0$ (à $x > 0$ fixé, prendre $\varepsilon = x/2$). Ainsi, S est continue sur $]0, +\infty[$.
Maintenant, si on fixe $k > 0$, chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^k$, avec

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = n^{k/2} e^{-\varepsilon\sqrt{n}} = o(1/n^2),$$

donc $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $k > 0$, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

En aucun cas on a montré qu'une convergence normale sur chaque $[\varepsilon, +\infty[$ entraîne la convergence normale sur $]0, +\infty[$.

Je lançais ça comme ça ; n'allez pas y voir un futur sujet de crispation, oulala non !

Finalement, dans ce type de situation, on a le choix entre :
— raisonner de façon élémentaire comme on vient de la voir ;
— utiliser le théorème qui suit (au programme) :

Théorème 12 — *Caractère $\mathcal{C}^1$ par localisation*

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :
> — $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
> — $\sum f'_n$ converge **uniformément sur tout segment inclus dans** I.
> Alors :
> — l'application somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
> — pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

On a seulement donné l'énoncé $\mathcal{C}^1$; à vous d'imaginer l'énoncé $\mathcal{C}^0$ et l'énoncé $\mathcal{C}^k$, voire $\mathcal{C}^\infty$!

3.4 La fonction ζ de Riemann

Définition 6 — *Fonction ζ*

La fonction ζ est définie sur $D = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$ par :

$$\forall z \in D, \qquad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}\cdot$$

— **Définition :** pour $z \in D$, on a $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$, donc la série converge bien simplement (série de Riemann).

— **Continuité :** si on prend $z \in D_a = \{Z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(Z) \geqslant a\}$, avec $a > 1$, alors $\left|\frac{1}{n^z}\right| \leqslant \frac{1}{n^a}$, et il y a donc convergence normale de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^z$ sur D_a. Ceci assure la continuité de ζ sur chaque D_a, donc sur leur réunion, à savoir D.

Remarque : On a librement adapté l'énoncé de continuité pour une variable réelle au cadre d'une variable complexe. Mais vous pouvez préférer travailler sur $]1, +\infty[$ bien entendu.

— **Dérivabilité puis classe $\mathcal{C}^\infty$:** on s'intéresse à la restriction de ζ à $I =]1, +\infty[$, qui va être établie en localisant aux intervalles $I_a = [a, +\infty[$ avec $a > 1$. En posant $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec

$$f_n'(x) = \left(\frac{1}{n^x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{-x\ln n}\right)' = (-\ln n)\mathrm{e}^{-x\ln n} = -\frac{\ln n}{x^n},$$

donc $\|f_n'\|_{\infty, I_a} = \frac{\ln n}{a^n} = o(1/n^2)$, donc on a convergence normale donc uniforme de $\sum f_n'$ sur I_a, donc ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_a. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. Maintenant, si on fixe $p > 0$, on montre de la même façon la convergence normale de $\sum f_n^{(p)}$ sur chaque I_a.

$$\boxed{\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]1, +\infty[.}$$

— **Comportement en $+\infty$:** on a déjà vu[8] : $\zeta(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. On peut essayer de voir un peu plus loin :

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{2^x} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\cdot$$

Mais on peut voir que dans le dernier terme, la somme est négligeable devant le premier terme, puisque le rapport vaut $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n/2)^x}$, et qu'on peut à nouveau appliquer le théorème de la double limite à cette série normalement donc uniformément convergente sur $[2, +\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty,\ \zeta(x) = 1 + \tfrac{1}{2^x} + o\left(\tfrac{1}{2^x}\right)\cdot}$$

— **Comportement en 1^+ :** pour étudier ζ au voisinage de 1^+, on fixe (très fort) $x_0 = 1 + u_0 > 1$, et on réalise soigneusement une comparaison série/intégrale pour encadrer $\zeta(1 + u_0) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} g(p)$, avec $g : t \mapsto \frac{1}{t^{1+u_0}}\cdot$ Cette comparaison conduit à l'encadrement

$$\frac{1}{u_0} \leqslant \zeta(1 + u_0) \leqslant 1 + \frac{1}{u_0}$$

Et ainsi (gendarmisation après multiplication par u_0) :

$$\boxed{\text{Lorsque } u \text{ tend vers } 0^+, \text{ on a } \zeta(1+u) \sim \tfrac{1}{u}\cdot}$$

8. Application du théorème de la double limite, version séries.