Algèbre linéaire *et un peu plus*

1 Exercice : étude d'une suite numérique

1. Formulation bof... écrivons plutôt un programme Python :

```
from math import exp

def u_rec(n):
    if n == 0:
        return exp(1)-1
    else:
        return n*u_rec(n)-1

def u_it(n):
    u = exp(1)-1            # u vaut ici u0
    for k in range(1, n+1): # calcul de uk
        u = k*u - 1
    return u
```

2. *Étude de u*

2.1 J'imagine qu'une intégration par parties doit faire le job : left to the reader.

2.2 Si $n \in \mathbb{N}$, alors l'application $t \mapsto (1-t)^n e^t$ est positive sur $[0,1]$, donc d'intégrale positive. Par ailleurs, $u_{n+1} - u_n = -\displaystyle\int_0^1 t(1-t)^n dt$, quantité négative par le même argument que plus haut.

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ est positive et décroissante, donc convergente.}}$$

(Puisque décroissante et minorée)

2.3 Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1 \leqslant e^t \leqslant e$ (croissance de la fonction exponentielle). On multiplie par $(1-t)^n$ et on intègre ces inégalités sur $[0,1]$.

2.4 Le théorème des gendarmes est formel :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

3. *Un équivalent de u*

3.1 Rien de bien sorcier... si ce n'est que pour *montrer* que $A = B$, on évitera d'écrire « $A = B$ donc ... ». Bien entendu tout vient du fait que $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

3.2 Bien entendu (?) (S_n) est croissante (mais on évite de lancer l'argument farce de « somme de termes positifs ». On a par ailleurs évidemment $S'_n - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le point non instantanné mais non difficile est que la différence $S'_{n+1} - S'_n$ est négative. On écrit tranquillement cette différence, et on applique l'important théorème de la fraction (trait, dénominateur, puis seulement après : le numérateur).

3.3 Heu... c'est le théorème des suites adjacentes !

3.4 S_n est une somme partielle de la série convergente $\sum \dfrac{1^k}{k!}$, dont la somme vaut e^1, et donc :

$$\boxed{\lim S_n = \lim S'_n = e}$$

Bon, on a également $S_n - e = -\dfrac{u_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *dans l'esprit de l'énoncé...*

3.5 On a $e - S_n = \dfrac{u_n}{n!} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)n!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ d'après la question 2.3. L'autre inégalité vient du fait que (S'_n) converge vers e en décroissant, donc est minorée par e.

3.6 D'après les questions 3.2 et 3.5, on a $\dfrac{n}{n+1} \leqslant nu_n \leqslant 1$, ce qui permet de gendarmiser :

$$\boxed{\frac{u_n}{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ donc } u_n \sim \frac{1}{n}.}$$

2 Exercice : faire le bon pari

1. $\mathbb{P}(D_1)$ (resp. $\mathbb{P}(D_2)$) est la probabilité pour que la pièce tombe sur Pile (resp. Face), donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(D_1) = 1/3 \text{ et } \mathbb{P}(D_2) = 2/3}$$

Il s'agit de rappeler la définition d'un système complet : $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et $D_1 \cup D_2 = \Omega$, ce qui est clair ici.

2. $\mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ est la probabilité d'obtenir une face rouge sous l'hypothèse de jouer avec le premier dé, et selon les hypothèses :

$$\boxed{\mathbb{P}_{D_1}(R_n) = 2/3\,;\text{ et de même } \mathbb{P}_{D_2}(R_n) = 1/3}$$

3. Selon la formule des probabilités totales et puisque $\{D_1, D_2\}$ est un système complet :

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_1) + \mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}_{D_2}(R_1) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1) = \frac{4}{9}\cdot}$$

Rappel : je ne vous reprocherai pas de faire l'arbre de probabilités, mais s'il constitue une « preuve » en terminale, il n'est que le support visuel de la formule des probabilités totales en post-bac. Il est important de faire le lien.

4. Une fois le résultat de la pièce initiale connu (disons pile), les événements R_k sont indépendants (on ne change plus de dé) :

$$\boxed{\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2)}$$

On a de même $\mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}_{D_2}(R_2)$ donne en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}\cdot}$$

5. Même raisonnement que plus haut !

$$\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap ... \cap R_n) + \mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap ... \cap R_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}\cdot}$$

Toujours par application de la définition :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_1\cap...\cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_n)} = \cdots = \frac{2^n + 1}{3(2^{n-1} + 1)}\cdot}$$

6. On applique seulement la définition des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(D_1) = \frac{\mathbb{P}(D_1 \cap R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$$

soit encore :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(D_1) = \frac{\frac{1}{3}\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}\cdot}$$

On a de même :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap...\cap R_n}(D_1) = \frac{\mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap ... \cap R_n)}{\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_n)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}}$$

soit comme attendu :

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_1\cap...\cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}\cdot}$$

7. Il s'agit de comparer $p_1 = \mathbb{P}_{R_1\cap...\cap R_n}(D_1) = \dfrac{2^n}{2^n + 2}$ et $p_2 = \mathbb{P}_{R_1\cap...\cap R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{2^n + 1}{3(2^{n-1} + 1)}\cdot$

N'ayant pas trop d'idée du résultat, je vais résoudre une inégalité (attention, les équivalences seront cruciales) :

$$p_1 \leqslant p_2 \iff \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} + 1} \leqslant \frac{2^n + 1}{3(2^{n-1} + 1)} \iff 3 \times 2^{n-1} \leqslant 2 \times 2^{n-1} + 1 \iff 2^{n-1} \leqslant 1 \iff n - 1 \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{Dès que } n > 1 \text{ il vaut mieux parier sur } D_1 \text{ plutôt que } R_{n+1} \text{ (match nul pour } n = 1).}$$

3 Problème : différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

1. *Une première méthode*

1.1 Ça démarre quand même gentiment [1] :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

On a noté que $A^2 = -A$.

1.2 Bien entendu, puisque $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$:

$$\boxed{M = 4A + I_3}$$

1.3 Pour $n = 0$ et $n = 1$, ce n'est guère compliqué. Pour $n = 2$, et puisque $4A$ et I_3 commutent, on a :

$$M^2 = (4A + I_3)^2 = 16A^2 + 8A + I_3 = -16A + 8A + I_3,$$

donc finalement :

$$\boxed{M^0 = I_3 + 0 \times I_3,\ M^1 = I_3 + 4 \times A \text{ et } M^2 = I_3 - 8 \times A.}$$

1.4 On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$. »
— On a déjà établi $\mathcal{P}(n)$ pour $n \leqslant 2$.
— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour $n \geqslant 2$ fixé. On a alors $M^n = I_3 + u_n M$, donc

$$M^{n+1} = (I_3 + u_n A)(I_3 + 4A) = I_3 + (4 + u_n)A + 4u_n \underbrace{A^2}_{-A} = I_3 + (4 - 3u_n)A,$$

si bien qu'en posant $u_{n+1} = 4 - 3u_n$, on a bien $M^{n+1} = I_3 + u_{n+1}A$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Le principe de récurrence s'applique et nous permet de conclure.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } u_n \in \mathbb{N} \text{ tel que } M^n = I_3 + u_n A.}$$

Formellement, la relation de récurrence n'a été établie que pour $n \geqslant 2$. On constate qu'elle reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

1.5 *Mais comment ont-ils eu l'idée de poser $v_n = u_n - 1$?!?!*

1.5.1 Par définition de v_n mais aussi de v_{n+1}, et grâce à la relation de récurrence établie dans la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = (-3u_n + 4) - 1 = -3u_n + 3 = -3(u_n - 1) = -3v_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison 3.}}$$

1.5.2 Le lecteur maîtrisant les points les plus subtils du programme de première pourra conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = (-3)^n v_0 = (-3)^n(u_0 - 1) = -(-3)^n.}$$

1.5.3 Si on maîtrise en plus le programme de cinquième (sixième ? quatrième ?), on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-3)^n.}$$

Et bien entendu, on ne passe pas à la suite sans avoir vérifié que cette relation est correcte pour $n \leqslant 2$.

1.6 Il reste à calculer $M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A$ (yeah !) :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}}$$

2. *Une deuxième méthode*

2.1 Question surprenante... L'équation $M = 4J - 3I_3$ est clairement **équivalente** à $J = \frac{1}{4}(M + 3I_3)$.

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est l'unique matrice telle que } M = 4J - I_3.}$$

1. Et ça ne va jamais vraiment s'énerver !

Au fait, dans l'équivalence, quel sens donne l'existence, et quel sens donne l'unicité ?

2.2 On calcule : $J^2 = J$. Ensuite, $J^3 = J^2 \times J = J \times J = J$, puis par récurrence qu'on va s'accorder immédiate *(surtout si le cas $n = 3$ est clair)* :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = J}$$

Attention, $J^0 = I_3$; ce point sera important quand on binômisera dans la question suivante.

2.3 *Une dernière méthode*

2.3.1 La formule du binôme est en fait un théorème : elle dit que sous certaines hypothèses (légères, mais pas complètement creuses !) on a une certaine relation (la « formule ») :

$$\boxed{\text{Si } A \times B = B \times A \text{ et } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.}$$

On a laissé pudiquement de côté la nature de A et B. Bien entendu, si A et B sont des réels ou des complexes, la commutation est une hypothèse peu contraignante. Mais d'une manière générale, cette relation s'applique dans des anneaux, *c'est-à-dire des ensembles munis d'une somme et d'un produit se comportant cordialement l'un vis-à-vis de l'autre* [2] *; mais le produit n'est pas forcément commutatif. Notons enfin que quand on applique la formule du binôme, on peut préférer manipuler l'expression symétrique $A^{n-k}B^k$.*

2.3.2 *Intuition démente :* on va regarder si par hasard on ne pourrait pas appliquer le théorème précédent pour calculer $M^n = (4J - 3I_3)^n$. On pense à vérifier que $4J$ et $-3I_3$ commutent effectivement [3], si bien qu'on peut effectivement binômiser. On a bien entendu $(-3I_3)^{n-k} = (-3)^{n-k}$ et $(4J)^k = \begin{cases} I_3 & \text{si } n = 0 \\ 4^k J & \text{sinon} \end{cases}$

Dans la somme, on laisse donc de côté le premier terme $\binom{n}{0}(4J)^0(-3I_3)^n = (-3)^n I_3$, et tous les termes qui restent sont de la forme $\lambda_k J$, donc on peut factoriser J :

$$\boxed{M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}\right) J}$$

2.3.3 Cette fois, on binômise sur $(4-3)^n$ (et OUI, 4 et -3 commutent !) puis on isole le premier terme :

$$1 = (4-3)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = (-3)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}$$

Ainsi, comme annoncé :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n.}$$

2.3.4 On continue de recoller les morceaux [4] : d'après les deux dernières questions, on a :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J.}$$

2.4 Pffff....

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}}$$

3.3.1 On calcule les rangs par opérations élémentaires... ou par des considérations plus élémentaires :

— La matrice $A + 3I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ a ses deux premières lignes non colinéaires, et la troisième est égale à l'opposé de la première, donc son rang vaut 2 (on pouvait aussi *voir* : $C_3 = 2C_1 - C_2$, mais je vous encourage à ne pas trop *chercher* ce genre de relation absurde...).

— La matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 (lignes ou colonnes...).

$$\boxed{\operatorname{rg}(A + 3I_3) = 2 \text{ et } \operatorname{rg}(A - I_3) = 1.}$$

---

2. Je n'ai jamais réussi à retenir une définition plus précise.

3. Inutile de détailler : il faut juste le signaler. La matrice I_3 (et ses multiples) commutent bien évidemment avec tout le monde.

4. Ils sont tellement petits qu'on finirait par se perdre...

Le théorème du rang nous fournit alors les dimensions des noyaux des applications linéaires canoniquement associées :

$$\boxed{\dim\left(\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id})\right)=1 \text{ et } \dim\left(\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})\right)=2.}$$

Et désolé pour la typo : il est bien question de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_e)$ *et non* $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id}_E)$.

3.2 Soit $\overrightarrow{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$; notons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ sa matrice-coordonnées. On a :

$$\overrightarrow{v}\in\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id}) \iff (A+3I_3)X=0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & & & - & 8z & = & 0\\ 4x & + & 4y & + & 4z & = & 0\\ 4x & & & + & 8z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & - & 2z & = & 0\\ & & 4y & - & 4z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2z\\ y & = & z\end{array}\right.$$

Et donc : $\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id})=\{(-2z,z,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}(\overrightarrow{v_1})$, avec $v_1=(2,-1,-1)$.
C'est plus rapide pour le noyau de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, dont on sait qu'il est de dimension $3-1=2$, et contient (regarder les colonnes de sa matrice) $\overrightarrow{v_2}=(0,1,0)$ et $\overrightarrow{v_3}=(1,0,-1)$, vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f+3\mathrm{Id}) \text{ possède pour base } (\overrightarrow{v_1}) \text{ et } \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) \text{ possède pour base } (\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}).}$$

Pour montrer que $\mathcal{V}=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une base de E, il suffit de vérifier qu'elle est de rang 3 :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{V})=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=3.$$

Ainsi, $\mathcal{V}$ est génératrice [5] et est de cardinal 3, donc est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer la matrice de f dans cette base, il suffit de se souvenir (...) de ce que représentent les colonnes d'une telle matrice, à savoir : les coordonnées des $f(v_i)$ dans la base $\mathcal{V}$. Or par construction, $f(v_1)=-3v_1$, $f(v_2)=v_2$ et $f(v_3)=v_3$; on obtient donc une matrice diagonale.

$$\boxed{\mathcal{V}=(v_1,v_2,v_3) \text{ est une base, et } \operatorname{Mat}(f,\mathcal{V})=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

3.3 Il s'agit simplement d'appliquer la formule de changement de base pour des endomorphismes : si on note P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$ (c'est à dire la matrice dont les colonnes représentent les v_i dans la base $\mathcal{E}$), alors :

$$\operatorname{Mat}(f,\mathcal{V})=P^{-1}\operatorname{Mat}(f,\mathcal{E})P$$

$$\boxed{\text{En prenant } P=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}, \text{ on a } D=P^{-1}MP.}$$

3.4 On peut évidemment montrer cela par récurrence, mais on peut également noter que D^n et M^n sont les matrices de f^n dans les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}$, puis appliquer la formule de changement de variable à l'endomorphisme f^n, ce qui nous donne $D^n=P^{-1}M^nP$, et il n'y a plus qu'à multiplier par P à gauche et P^{-1} à droite.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ M^n=PD^nP^{-1}}$$

3.5 Boarf, les puissances d'une matrice diagonale, je pense qu'on peut balancer le résultat directement (en signalant éventuellement que ça se montrerait par récurrence vaguement immédiate) :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ D^n=\begin{pmatrix}(-3)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

5. On verra plus tard que quand on recolle des familles libres de sous-espaces propres (i.e. $\operatorname{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})$), on récupère toujours une famille libre.

3.6 Pour le calcul de P^{-1}, whatever works : on peut résoudre formellement $PX = Y$, système équivalent à $X = P^{-1}Y$. On peut aussi noter que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{E}$. Adoptons ce point de vue en exprimant la base canonique à l'aide de $\mathcal{V}$ (on part des relations connues, qu'on « inverse » par résolution de système :

$$\begin{cases} 2e_1 - e_2 - e_3 = v_1 \\ e_2 = v_2 \\ e_1 - e_3 = v_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2e_1 - e_2 - e_3 = v_1 \\ e_2 = v_2 \\ e_2 - e_3 = 2v_3 - v_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2e_1 - e_2 - e_3 = v_1 \\ e_2 = v_2 \\ - e_3 = 2v_3 - v_1 - v_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + e_3) = v_1 + v_2 - v_3 \\ e_2 = v_2 \\ e_3 = v_1 + v_2 - 2v_3 \end{cases}$$

Et il n'y a plus qu'à ranger ces informations à leur place :

$$\boxed{P^{-1} = \underset{\mathcal{V}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

3.7 Il n'y a plus qu'à calculer PMP^{-1} ; yeah ! Je plisse les yeux, et calcule de tête :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}}$$

Wow, on retrouve le résultat déjà rencontré deux fois !

4. *Une algèbre de matrices*

4.1 Il suffit de noter que c'est $\mathrm{Vect}(I_3, M)$, et le cours nous assure que « le sous-espace engendré par des vecteurs » ... est bien un sous-espace ! Par construction, (I_3, M) en est une famille génératrice, et comme elle est libre (deux matrices non colinéaires), c'en est même une base.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \text{ et } (I_3, M) \text{ en est une base.}}$$

4.2 On a déjà noté : $M^2 = I_3 - 8A = I_3 - \frac{8}{4}(M - I_3) = 3I_3 - 2M \in E$. Ensuite, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha I_3 + \beta M)(\gamma I_3 + \delta M) = \alpha\beta I_3 + (\alpha\delta + \beta\gamma)M + \beta\delta \underbrace{M^2}_{3I_2 - 2M} \in \mathrm{Vect}(I_2, M) = E$$

$$\boxed{E \text{ est stable par multiplication interne.}}$$

4.3 On a tout simplement :

$$P^{-1}RP = P^{-1}(\lambda I_3 + \mu M)P = \lambda P^{-1}P + \mu P^{-1}MP = \lambda I_3 + \mu D,$$

et c'est gagné, car une combinaison linéaire de matrices diagonales reste diagonale.

$$\boxed{P^{-1}RP \text{ est diagonale.}}$$