Algèbre linéaire et réduction

À rendre au plus tard le mardi 12 novembre 2024

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension finie n. L'algèbre des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note comme d'habitude $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $k \in \mathbb{N}$: $u^{k+1} = u^k \circ u$; on rappelle que u est déclaré nilpotent lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. On note enfin $\mathrm{Sp}(v)$ le spectre de tout endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$.
Si $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace l'espace des matrices à coefficients réels à n lignes et p colonnes.
Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est alors simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée I_n.
Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A)$ désigne le spectre de A.
Enfin, si $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans cet ordre.

1 Préliminaires sur les endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent ; on pose $p = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^*;\ u^k = 0\}$.

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $\big(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $u^n = 0$.
4. Quel est le polynôme caractéristique de u ? u est-il diagonalisable ?

2 Étude d'équations du type $X^2 = A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1 Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Calculer les valeurs propres de u, et justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 (classées dans l'ordre croissant $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$). Déterminer pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$ l'unique vecteur f_i dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(f_i) = \lambda_i f_i$.
3. Justifier que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, écrire la matrice D de u dans cette base, et enfin expliciter une relation entre A et D.
4. On suppose que $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, et on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
   (a) Vérifier que $v^2 = u$ et que $v \circ u = u \circ v$.
   (b) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $v(f_i)$ est colinéaire à f_i.
   On pourra s'intéresser à $(u \circ v)(f_i)$.
   (c) En déduire que la matrice V de v dans la base $\mathcal{F}$ est diagonale, et préciser les valeurs sur la diagonale.
5. Résoudre $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Combien y a-t-il de solutions ?

2.2 Quelques résultats généraux

Dans les questions 1, 2 et 3 qui suivent, u désigne un endomorphisme nilpotent de E et :

$$p = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^*;\ u^k = 0\}.$$

1. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.
   (a) Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$ puis en déduire : $p \leqslant \dfrac{n+1}{2}\cdot$
   (b) Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Existence d'une racine pour* $\mathrm{Id} + u$
   (a) Justifier l'existence de réels $b_0, ..., b_{n-1}$ tels que $b_0 = 1$, $2b_0b_1 = 1$, et

$$\forall q \in [\![2, n-1]\!], \qquad \sum_{k=0}^{q} b_k b_{q-k} = 0$$

   On pose maintenant $w = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k u^k$.
   (b) Montrer que $w^2 = \mathrm{Id} + u$.
3. Dans cette question, on suppose que $p = n$; on a donc $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On suppose par ailleurs que $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $g^2 = \mathrm{Id}_E + u$.
   (a) Soit $x_1 \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. Justifier que $\big(x_1, u(x_1), ..., u^{n-1}(x_1)\big)$ est une base de E, puis qu'il existe $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_{n-1}u^{n-1}(x_1)$.
   (b) Vérifier que $g \circ u = u \circ g$, puis que $g = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_{n-1}u^{n-1}$.
   (c) Justifier que $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre puis, en calculant g^2 de deux façons différentes, montrer : $\alpha_0^2 = 1$, $2\alpha_0\alpha_1 = 1$, et $\sum\limits_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$ pour tout $q \in [\![2, n-1]\!]$ (si $n \geqslant 3$).
   (d) Montrer alors qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_k = \varepsilon b_k$, et en déduire que $g = \pm w$.
4. **Application :** déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable ; on admet qu'il existe deux endomorphismes $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tels que d est diagonalisable, n est nilpotent, avec $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
   Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(d)$, on note E_λ le sous-espace propre associé à d : $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(d - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
   On suppose de plus que toutes les valeurs propres de u sont strictement positives : Sp$(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(d)$, E_λ est stable par n et que l'endomorphisme n_λ induit par n sur E_λ est nilpotent.
   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}(d) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et en déduire que d est inversible.
   (c) On note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres **distinctes** de d. Justifier que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}$ et donner, pour tout $x = x_1 + \cdots + x_r \in E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$, l'expression de $d(x)$.
   (d) Construire un endomorphisme δ de E tel que $\delta^2 = d$ et vérifiant $n \circ \delta = \delta \circ n$.
   (e) Vérifier que δ est inversible puis que l'endomorphisme $n \circ \delta^{-2}$ est nilpotent.
   (f) En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que l'endomorphisme $w = P(n \circ \delta^{-2})$ vérifie $w^2 = \mathrm{Id}_E + n \circ \delta^{-2}$; puis construire $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.