Samedi 16 novembre 2024 – calculatrices autorisées

1 D'après un exercice d'oral

On veut déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter (en détaillant la démarche et les calculs !) une matrice inversible R telle que $R^{-1}AR$ soit diagonale.
   On ne demande pas de calculer R^{-1}.
2. Presque sans calcul (et sans l'hypothèse $P(A) = B$) donner la valeur de $R^{-1}BR$.
3. Montrer que l'équation matricielle $P(A) = B$ est équivalente à trois équations scalaires de la forme $P(x) = y$.
4. Expliciter P_0 de degré 2 tel que $P_0(A) = B$.
5. Déterminer enfin l'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = B$.
6. Déterminer l'ensemble des $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(B) = A$.

2 Une réduction en dimension 5

2.1 Deux preuves d'un résultat de cours

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E un espace de dimension finie, possédant $P \in \mathbb{K}[X]$ comme polynôme annulateur. On se propose de montrer de deux façons que le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On prend x_0 un vecteur propre de u associé à cette valeur propre λ. Que vaut $u^2(x_0)$? Que vaut $u^k(x_0)$? Dire enfin ce que vaut $Q(u)(x_0)$ si $Q \in \mathbb{K}[X]$, puis conclure.
2. Justifier que $X - \lambda$ divise $P - P(\lambda)$. Prendre la factorisation induite par la remarque précédente, l'évaluer en u, et conclure en considérant les noyaux des deux membres.

2.2 Une matrice 5×5

On définit ici :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice M^2, puis exprimer $M^2 + M$ en fonction de I et d'une matrice très connue !
2. Calculer le carré de cette matrice connue... et en déduire un polynôme annulateur de M.
   On maintiendra une forme de ce polynôme la plus factorisée possible, bien entendu...
3. Arrivé ici, que dire du spectre de M ?
4. Sans calculer son polynôme caractéristique, montrer que M possède exactement une valeur propre entière.
5. Montrer que M est diagonalisable.
6. Avec le moins de calculs possible (mais des considérations sur la trace de M), déterminer le spectre et M et son polynôme caractéristique.

3 Valeurs propres de matrices stochastiques

Dans ce problème vous pouvez vérifier *vos calculs à la calculatrice, mais vous devez les* expliciter *sur la copie.*

Soient n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes, $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Question préliminaire

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général $a_{i,j}$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général $b_{i,j}$.
   (a) À quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (b) On suppose cette condition vérifiée, et on note $c_{i,j}$ le terme général de la matrice AB. Exprimer $c_{i,j}$ en fonction des $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.
2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p. On dit que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.
   (a) Montrer que si la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A et la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
3. On note :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}$$
   Calculer D^n, puis montrer que $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *On donnera une expression explicite de la limite.*
5. Montrer qu'il existe un unique vecteur ligne (qu'on explicitera) $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que :
   — $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$;
   — $a + b + c = 1$;
   — $\pi A = \pi$
   NDLR : faites un brouillon, merci ! Idéalement, j'aimerais voir les calculs. Mais si vous racontez ce que vous avez demandé à la calculatrice, c'est déjà ça...

Partie II

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante :

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On note I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B-(a+b-1)I_2)$.
2. Soit p un entier strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que :
   $$X^p = PQ + \alpha_p X + \beta_p.$$
   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.
   (c) En déduire une expression de B^p.
3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** lorsque :
- pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:
$$m_{i,j} \geqslant 0;$$
- la somme des termes de chaque ligne vaut 1, c'est-à-dire, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:
$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

1. Soit M une matrice stochastique. Montrer que pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:
$$m_{i,j} \leqslant 1.$$
2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.
   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels positifs. Montrer que si X_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.
   (c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Max}} |x_i| = 1$.
   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$. Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:
   $$|y_i| \leqslant 1.$$
   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :
   $$|\lambda| \leqslant 1.$$
   (c) Montrer que les valeurs propres de M sont toutes de module inférieur ou égal à 1.