Psi 945 – 2024/2025 ψ **Programme de khôlle**

Khôlles : quinzaine numéro 4

Du 18 au 29 novembre 2024

1 Première semaine : réduction

- Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres ; endomorphismes diagonalisables (existence d'une base diagonalisante, ou E s'écrivant comme somme des sous-espaces propres). Extension aux matrices (mais le point de vue géométrique est toujours présent).
- Étude à la main de quelques cas comme les matrices triangulaires, et les endomorphismes ou matrices de rang 1.
- Liens entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.
- Utilisation de polynômes annulateurs pour la réduction (attention, pas de polynôme minimal). Polynôme caractéristique.
- CN de diagonalisabilité : χ_u scindé. CS : χ_u scindé à racines simples. CNS : χ_u scindé, et les sous-espaces propres ont pour dimension la multiplicité de la valeur propre.
- CNS algébrique de diagonalisabilité : existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples (plus précisément : le produit des $X-\lambda$, pour λ décrivant le spectre).
- Trigonalisation (guidée).

2 Deuxième semaine : réduction ; suites et séries de fonctions

Encore de la réduction. Et aussi des suites et séries de fonctions :

- Applications de la réduction : commutant, équations polynomiales, systèmes différentiels linéaires.
- Suites et séries de fonctions. Convergence simple et uniforme.
- Convergence normale, pour les séries. Les théorèmes de régularité sont énoncés et prouvés pour les *suites* de fonctions, et ré-énoncés et essentiellement utilisés dans le cadre des *séries* : continuité, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^p$, intégration, et double limite.
- Pour que $\sum f_n$ converge uniformément, il est nécessaire d'avoir $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Il a été chuchoté qu'en cas de localisation, la régularité passait des $[\alpha,\beta]$ à $]0,+\infty[$ (par exemple), mais qu'il n'en allait pas tout à fait de même pour les convergences uniformes/normales.

3 Questions de cours

- (S1) Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- (S1) Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- (S1+S2) Si P est un polynôme annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}(u)\subset \mathrm{Rac}(P)$; avec égalité lorsque P est le polynôme caractéristique.
- (S2) Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes, alors l'équation $B^2=A$ possède 2^{n-1} ou 2^n solutions.
- (S2) La convergence uniforme implique la convergence simple. Être capable de donner un contre-exemple pour la réciproque.
- (S2) La convergence normale implique la convergence uniforme.
- (S2) Théorème de continuité pour une limite uniforme.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : suites et séries de fonctions ; début des séries entières.