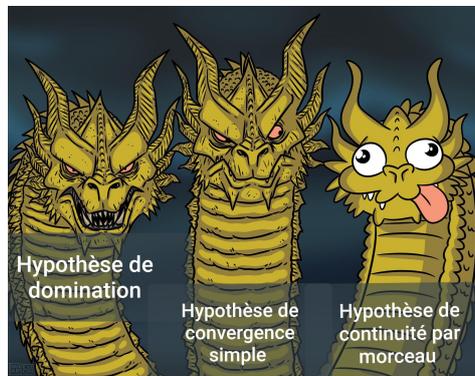


Intégration

« Pour prendre une décision il faut être un nombre impair de personnes. Et trois, c'est déjà trop. » – G. Clémenceau.

Table des matières

1	Rappels de première année	2
1.1	Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux	2
1.2	Un théorème anodin	4
1.3	Quelques inégalités	5
1.4	Un exercice classique	6
2	Intégrales généralisées	6
2.1	Intégrales convergentes	6
2.2	Cas de base	7
2.3	Analogies avec les séries – ou pas!	9
2.4	Outils de calcul	10
3	Fonctions intégrables	11
3.1	Absolute convergence	11
3.2	Cas de base et théorèmes de comparaison	12
3.3	Stabilité de l'intégrabilité	12
4	Théorèmes d'interversion	13
4.1	Théorème de convergence dominée	13
4.2	Intégration terme à terme	15
5	Intégrales à paramètres	16
5.1	Continuité	17
5.2	Caractère \mathcal{C}^1	18
5.3	La fonction Γ	19
5.4	Transformée de Fourier	20
5.5	Transformée de Laplace	21



1 Rappels de première année

1.1 Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux

L'intégrale d'une fonction f **continue** sur un **segment** $[a, b]$ est essentiellement définie pour correspondre à l'intuition « aire sous la courbe », quitte à bricoler pour traiter le cas négatif (on parle alors pompeusement d'« aire algébrique »). Elle est notée $\int_a^b f$, $\int_{[a,b]} f$ ou encore $\int_a^b f(t)dt$, le « t » étant bien entendu une variable muette, et cette dernière notation évoquant qu'on fait une somme d'aires de « rectangles infinitésimaux ».

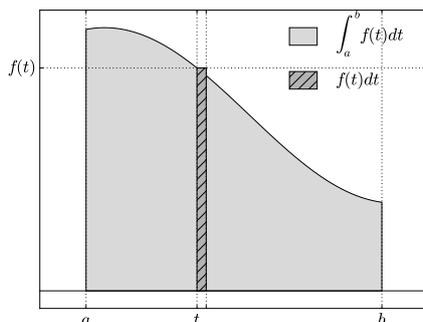


FIGURE 1 – Intégrale = aire

Pour $a > b$, on définit $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ (mais alors, il ne faut plus écrire $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[b,a]} f$).

Finalement¹ les propriétés de l'intégrale sont celles attendues : linéarité, Chasles, positivité (si f est positive et $a < b$, alors $\int_a^b f \geq 0$; nous reviendrons sur ce point ultérieurement). On note dès maintenant que la positivité fournit la croissance : si $f \leq g$ et $a < b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (considérer la fonction positive $g - f$).

Cette notion d'intégrale s'étend naturellement aux fonctions continues par morceaux.

DÉFINITION 1 — *Fonctions continues par morceaux*

Une fonction f définie sur un segment $S = [a, b]$ est dite **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue et possède des limites finies en x_k^+ et x_{k+1}^- .

REMARQUES :

- C'est équivalent à « la restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ possède un prolongement continu à $[x_k, x_{k+1}]$ ».
- La valeur de f en les x_k n'a aucune importance... mais il faut tout de même que f soit définie en ces points!
- Si I est un intervalle qui n'est pas un segment ($[0, +\infty[$, $]0, 1]$, $\mathbb{R} \dots$), f est déclarée continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux. *On ne vous embêtera pas avec ça...*

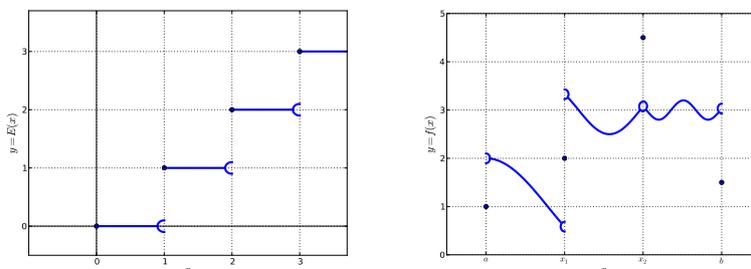


FIGURE 2 – Des fonctions continues par morceaux

1. Non, pas « Au final »...

EXEMPLES :

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $[0, 3]$, mais aussi sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 2] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, pas plus que $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

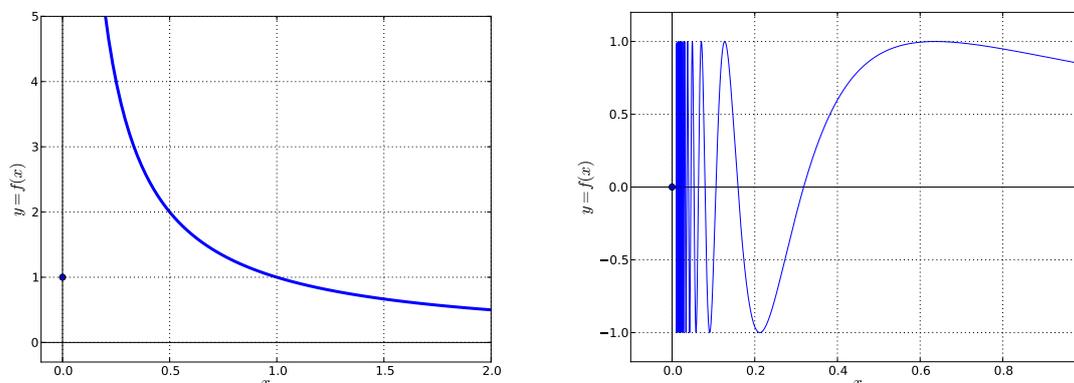


FIGURE 3 – Des fonctions qui ne sont pas continues par morceaux

- Dans les deux derniers exemples, si on restreint les fonctions à $]0, 1]$ alors on obtient des fonctions continues par morceaux. *Bref : vouloir prolonger de façon artificielle de l'ouvert au fermé n'est pas forcément une bonne idée !*

Le résultat suivant est conforme à l'intuition qu'on a normalement de l'intégrale :

THÉORÈME 1 — *Convergence des sommes de Riemann*

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

Bien entendu, lire ou énoncer ce théorème sans son interprétation géométrique est une funeste blague...

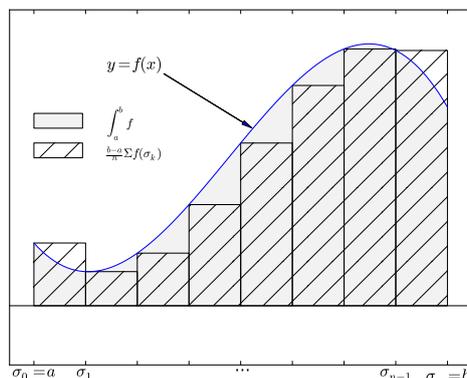


FIGURE 4 – Sommes de Riemann

Exercice 1. CCP 2009

Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{k+n}{k^2+n^2}$ converge.

On trouvera comme limite : $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

1.2 Un théorème anodin

Le résultat qui suit est central en analyse : il relie le calcul différentiel (calcul des tangentes) et le calcul intégral (calcul des aires).

THÉORÈME 2 — *LE théorème fondamental de l'analyse*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe \mathcal{C}^1 , de dérivée f .

REMARQUES :

- $\int_0^1 f(t)dt$ n'est pas dérivable : ce n'est pas une fonction. Pas plus que $\int_0^{\sqrt{2}} f(t)dt$ ou $\int_0^x f(t)dt$. Donc OUI, il faut parler de « $x \mapsto$ ». Particulièrement ceux qui depuis toujours confondent fonctions et expressions. Ce n'est pas qu'une manie de présentation.
- On évitera la petite blague consistant à parler de $\int_a^x f(x)dx$...
- Une **primitive** de f est par **définition** une fonction qui se dérive en f , et non par définition une fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Le théorème fondamental dit donc que si f est continue, alors les applications $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sont effectivement des primitives. Confondre définition et théorème conduit invariablement à de lourdes confusions et erreurs de raisonnement...
- Si f est seulement **continue par morceaux**, on peut quand même dire des choses sur $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: elle est continue en tout point, et dérivable de dérivée $f(x_0)$ en tout x_0 tel que f est continue en x_0 .
- Pour dériver $\Psi : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$, on introduira $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ puis on écrira $\Psi(x) = \Phi(\beta(x)) - \Phi(\alpha(x))$...

La première des conséquences de ce théorème fondamental est le résultat suivant :

PROPOSITION 1 — Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Si f est continue et F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

C'est ce théorème qu'on utilise presque toujours quand on calcule des intégrales : $\int_a^b t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b$.

Une conséquence directe importante du théorème fondamental est que quand g est de classe \mathcal{C}^1 sur I alors :

$$\forall a, b \in I, \quad g(b) = g(a) + \int_a^b g'(t)dt.$$

Les deux résultats suivants sont également des conséquences du théorème fondamental.

PROPOSITION 2 — Intégration par parties

Si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur I et $a, b \in I$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

PROPOSITION 3 — Changement de variable

Si $f \in \mathcal{C}_M(J)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ et $a, b \in I$, alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt.$$

REMARQUES :

- Concrètement, on réalise la plupart du temps les changements de variable « à la physicienne » : « On pose $x = \varphi(t)$; on a alors $dx = \varphi'(t)dt$, et pour que $x = \varphi(t)$ aille de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$, il suffit que t aille de a à b , etc. ». Il y a des allergiques à cette méthode, mais je n'en connais pas chez ceux qui calculent vite et bien et savent faire calculer vite et bien.
- En pratique, on est souvent plutôt dans une situation où pour calculer $\int_A^B f(x)dx$ on souhaite poser $t = \psi(x)$ (on définit une nouvelle variable comme fonction de l'ancienne plutôt que de voir l'ancienne comme fonction d'une nouvelle). Si on réalise le calcul à la physicienne, on voit que d'une part, il faudra trouver a et b tels que $\psi(a) = A$ et $\psi(b) = B$ (vague hypothèse de surjectivité pour ψ , mais ça ne pose jamais de problème) et d'autre part, on va diviser (au moment de transformer le $dt = \psi'(x)dx$ et $dx = \frac{dt}{\psi'(x)} = \dots$) par la dérivée de ψ' ... qui doit donc NE PAS S'ANNULER. La situation idéale serait donc d'avoir un changement de variable qui soit bijectif, de dérivée ne s'annulant pas, avec la même propriété pour la bijection réciproque.

1.3 Quelques inégalités

On commence par une variation sur la positivité de l'intégrale, en s'intéressant aux cas d'égalité : si on prend la fonction « partie entière » sur le segment $[0, 1]$, alors cette fonction est à valeurs positives, est non nulle, et pourtant son intégrale sur $[0, 1]$ est nulle !

PROPOSITION 4 — Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction à valeurs positives (≥ 0) et non nulle sur le segment $[a, b]$ ($a < b$) avec de plus f continue. On a alors $\int_a^b f > 0$.

PREUVE : Fixer x_0 tel que $f(x_0) > 0$, puis α tel que $|f(x) - f(x_0)| \leq f(x_0)/2$ pour $|x - x_0| \leq \alpha$. On peut alors minorer f par une fonction g en escalier dont l'intégrale vaut $f(x_0)\alpha > 0$ (bon, la moitié de ça, si on fait attention aux bords, mais ça suffira).

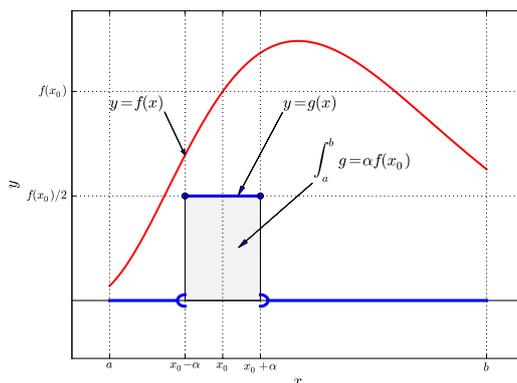


FIGURE 5 – Si $f \geq 0$ est continue non nulle, alors son intégrale est strictement positive

Le résultat précédent est en général utilisé par la contraposée : « telle fonction est continue, positive et d'intégrale nulle, donc est uniformément nulle ».

Il faut ensuite savoir établir des inégalités élémentaires sur les intégrales. La première des techniques consiste à dire que « la valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue ». Remplacez « intégrale » par « somme », et vous retrouverez une inégalité qui porte un nom connu...

THÉORÈME 3 — « Inégalité triangulaire »

Si $a < b$ et $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{C})$, alors :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

PREUVE : Par exemple via des sommes de Riemann... ou plus simplement (si f est à valeurs réelles) via l'encadrement $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ qu'on intègre!

L'inégalité à suivre est moins importante que la précédente, mais appartient à une famille générale d'inégalités... rencontrées dès le lycée : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$!

THÉORÈME 4 — *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Si f et g sont continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ et à valeurs complexes, alors :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

De plus, si f et g sont continues, alors il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si f et g sont proportionnelles.

PREUVE : Si les fonctions sont à valeurs réelles, considérer l'application $t \mapsto \int_a^b (\lambda f + g)^2$, qui est polynomiale de degré au plus 2 (et penser aux cas particuliers où le degré ne vaut pas 2). Pour l'étendre au cas complexe, on peut tout simplement écrire $\left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |fg|$... mais le cas d'égalité demande un peu plus de travail. ■

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$. Montrer : $\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f} \geq 1$. Étudier les cas d'égalité.

1.4 Un exercice classique

Exercice 3. Riemann-Lebesgue light

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer :

$$\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

SOLUTION : Après intégration par parties (intégrer le cosinus pour faire apparaître un facteur $1/n$), majorer calmement les modules des différents termes.

REMARQUES :

- Le résultat (et la preuve) reste valide avec des sinus, ou en version exponentielle : $\int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.
- Si f est seulement continue par morceaux, c'est plus délicat, mais le résultat reste vrai. Pour le prouver, on utilise en général un argument d'approximation uniforme, via le résultat suivant, maintenant hors programme : il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe \mathcal{C}^1 qui converge uniformément vers f (et on continue en ε).

2 Intégrales généralisées

2.1 Intégrales convergentes

La définition suivante est assez pénible à lire/formuler pour les gens un peu pointilleux², mais c'est ainsi ; jetons un voile pudique sur la formulation. On rappelle que pour des séries, on³ distingue clairement la série $\sum u_n$ (qu'elle soit convergente ou non) et son éventuelle somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, qui elle n'a de sens qu'en cas de convergence. Hélas, on va avoir confusion des écritures pour les intégrales convergentes...

DÉFINITION 2 — *Intégrales convergentes sur $[a, +\infty[$*

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est une **intégrale convergente** lorsque l'application $X \mapsto \int_a^X f(t)dt$ possède une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$.

Lorsque c'est le cas, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ désigne cette limite.

Dans le cas contraire, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est déclarée **divergente**.

2. Lire ici « raisonnablement rigoureux » plus que « extrêmement casse-pieds ».
3. Moi, au moins !

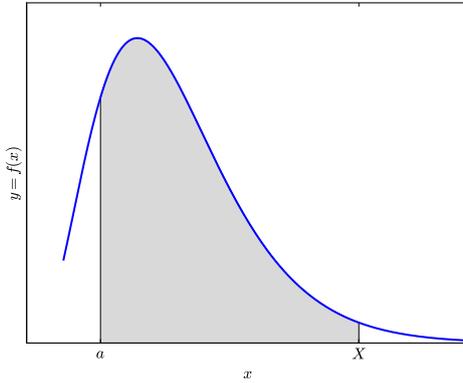


FIGURE 6 – Qu'est-ce qui se passe quand $X \rightarrow +\infty$?

EXEMPLES :

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente et vaut 1.
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est divergente.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\pi/2$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et vaut 1.
- Si $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente (on doit pouvoir majorer la fonction croissante $X \mapsto \int_0^X f(t) dt$ par une constante...) et vaut $n!$ (on détaillera plus tard en faisant des intégrations par parties sur des segments).

Arrivés ici, on aimerait pouvoir (comme pour les séries) établir des convergences sans forcément donner la valeur des intégrales. Des théorèmes de comparaison seront là pour ça, bien entendu.

On étend la définition de $[a, +\infty[$ à un intervalle quelconque : typiquement $]0, 1]$, $]0, +\infty[$, $]0, 1[$ ou encore \mathbb{R} !

DÉFINITION 3 — *Intégrales convergentes sur un intervalle*

|| L'intégrale d'une fonction continue par morceaux f sur un intervalle I est déclarée convergente
 || lorsque, pour $x_0 \in I$ fixé, la fonction $X \mapsto \int_{x_0}^X f(x) dx$ possède des limites finies aux bornes de
 || I .

2.2 Cas de base

Dans la proposition suivante, il faut retenir les résultats de convergence... et être capable de retrouver rapidement les valeurs des intégrales (sauf dans le dernier cas).

PROPOSITION 5 — Des intégrales convergentes

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\int_0^1 \ln t \, dt$ est convergente
- Pour tout $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \, dt$ est convergente.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ est convergente.

PREUVE :

- $\int_1^T \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln T & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} (T^{1-\alpha} - 1) & \text{sinon} \end{cases} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$
- Idem!
- $\int_T^1 \ln(t) dt = -1 - T \ln T + T \xrightarrow{T \rightarrow 0^+} -1$.
- $\int_0^T e^{-\alpha t} dt = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}$.
- On montre l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ en majorant (pour $T \geq 1$) $F(T) = \int_0^T e^{-t^2} dt$ par $F(1) + \int_1^T e^{-t} dt \leq F(1) + 1$; l'application F est donc **croissante** et majorée, donc convergente. ■

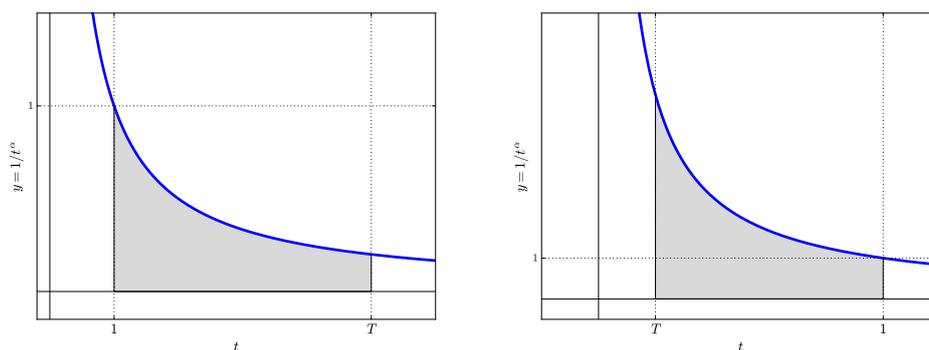


FIGURE 7 – Les applications $t \mapsto 1/t^\alpha$ au voisinage de $+\infty$ et 0^+

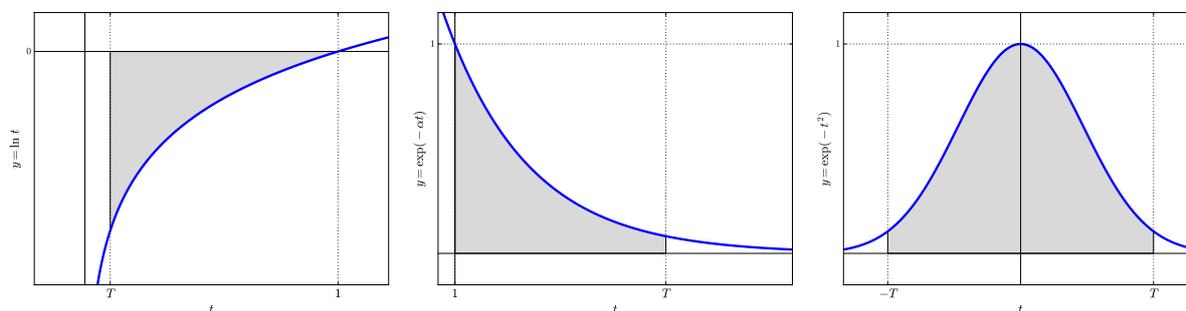


FIGURE 8 – Les fonctions \ln , $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$

Exercice 4. Pour quels α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est-elle convergente ?

2.3 Analogies avec les séries – ou pas !

La nature du problème d'une part et l'exemple des séries de Riemann d'autre part peuvent nous pousser à de fortes analogies entre séries convergentes et intégrales convergentes sur $[0, +\infty[$. Attention tout de même !

Commençons par la question de la divergence grossière...

Exercice 5. Soit f une application continue et à valeurs positives sur $[0, +\infty[$. Pour que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente est-il *NÉCESSAIRE* que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ ou bien est-ce *SUFFISANT* ?

On retrouve tout de même un résultat important qui existait dans le monde des séries (absolue convergence implique convergence).

PROPOSITION 6 — Absolue convergence et convergence

Si $f \in \mathcal{C}_M(I)$ et $\int_I |f(t)| dt$ est convergente, alors $\int_I f(t)dt$ est également convergente.

PREUVE : Comme pour les séries, on écrit $f = f_1 - f_2$ avec $f_1 = \text{Max}(0, f)$ et $f_2 = \text{Max}(-f, 0)$, de sorte que $0 \leq f_1 \leq |f|$ et $0 \leq f_2 \leq |f|$, et on prouve alors que $\int_I f_1$ et $\int_I f_2$ sont convergents. ■

REMARQUE : Attention, comme pour les séries on peut avoir $\int_I f$ convergente avec $\int_I |f|$ divergente. On peut construire un exemple simple inspiré des séries en prenant $f(t) = \frac{(-1)^{1+\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor}$ sur $[1, +\infty[$. L'exercice suivant fournira un autre exemple un peu plus compliqué mais important.

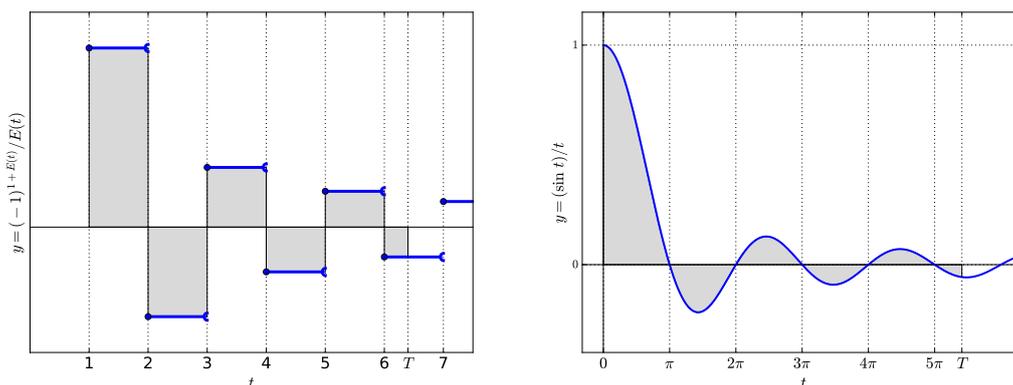


FIGURE 9 – Deux fonctions d'intégrales convergentes mais non « absolument convergentes »

Exercice 6. On définit, pour $t > 0$, $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$.

- Vérifier que f se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
- Réaliser une intégration par parties dans $\int_1^T \varphi(t)dt$, et montrer que l'intégrale du membre de droite est absolument convergente sur $[1, +\infty[$, puis que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ est convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Minorer $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\varphi(t)| dt$ par une quantité de la forme $\frac{A}{n+1}$, avec $A > 0$.
- En déduire que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ n'est pas « absolument convergente », i.e. : $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)| dt$ diverge.

2.4 Outils de calcul

Le principal outil préconisé (au moins par moi!) est : calculer sur des segments (techniques usuelles) avant de passer à la limite. Lesquels passages ne se font **qu'après avoir noté l'existence des limites, BIEN ENTENDU**.

On a vu que pour $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente. Le calcul qui suit va donner la valeur de ces intégrales. Plus précisément, on va prouver par récurrence que toutes ces intégrales sont convergentes, en donnant pour le même prix une relation simple entre celles-ci.

PROPOSITION 7 — Vers la fonction Γ

┌ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dy$ est convergente et vaut $n!$

PREUVE : On note, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ « l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et vaut $n!$ ».

— $\mathcal{P}(0)$ a été vue plus haut.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ établie, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé, et montrons la convergence de $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$. On réalise pour cela une intégration par parties, à $T > 0$ fixé :

$$\int_0^T t^{n+1} e^{-t} dt = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^T + (n+1) \int_0^T t^n e^{-t} dt.$$

$\mathcal{P}(n)$ (et les croissances comparées pour le terme intégré) nous assure que lorsque T tend vers $+\infty$, le membre de droite possède une limite finie, qui est $(n+1) \times n!$ Il en va donc de même du membre de gauche, ce qui prouve à la fois la convergence et la valeur de l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt \text{ converge et vaut } (n+1)!$$

On a bien prouvé $\mathcal{P}(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut $n!$

■

On peut également faire des changements de variable sur des segments avant de passer à la limite.

Exercice 7. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, alors $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente, et vaut $\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$.

SOLUTION : Formellement, le changement de variable $t = \sin \theta$ fait le job. Mais il s'agit de justifier tout cela soigneusement.

Fixons $T \in]0, 1[$. L'application $t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, T] = [0, \sin \theta_0]$ avec $\theta_0 = \text{Arcsin} T$. On a alors, par changement de variable $t = \sin \theta$ sur le segment $[0, T]$ (\sin est \mathcal{C}^1) :

$$\int_0^T \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\theta_0} \sin^n \theta d\theta = F(\text{Arcsin}(T)),$$

avec $F : Z \mapsto \int_0^Z \sin^n t dt$. Par continuité de $t \mapsto \sin^n t$, l'application Z est de classe \mathcal{C}^1 donc continue. Puisque Arcsin est également continue en 1, on obtient :

$$\int_0^T \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} F(\text{Arcsin}(1)) = F(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta,$$

ce qui prouve exactement ce qui était demandé (convergence et valeur de l'intégrale).

On donne tout de même les deux énoncés au programme, même si j'ai tendance à déconseiller (fortement) celui sur l'intégration par parties⁴.

PROPOSITION 8 — Changement de variable

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 et $f \in \mathcal{C}_M(]a, b[, \mathbb{C})$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$ sont de même nature, et si elles sont convergentes, alors elles sont égales.

PREUVE : Passer par des segments. ■

Avant de passer à la suite, le lecteur adaptera l'énoncé au cas d'une bijection strictement décroissante (bref : le cosinus sur $[0, \pi/2]$, mais en pratique, on utilise justement le sinus pour éviter de se casser la tête! Il reste les bijections type $x \mapsto 1/x...$).

EXEMPLE : Pour justifier l'existence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$, on souhaite réaliser le changement de variable $u = \sqrt{t}$, ou encore $t = u^2$ (c'est ce sens qui est privilégié par le théorème précédent). On considère donc l'application $\varphi : u \mapsto u^2$. C'est une bijection \mathcal{C}^1 croissante de $]0, +\infty[$ dans lui-même, donc $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ et $\int_0^{+\infty} 2ue^{-u}du$ sont de même nature... donc ici convergente; puis égale.

On peut souhaiter faire le changement de variable plus naturel $u = \sqrt{t}$ à la physicienne. On signale alors tout de même que $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[$ (attention à ouvrir) dans lui-même, puis on continue de la même façon que plus haut.

PROPOSITION 9 — Intégration par parties – casse-gueule

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$. Si fg possède une limite finie en a^+ et b^- , alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature, avec de plus

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'dt,$$

le crochet étant à prendre au sens de « différence des limites de fg en respectivement b^- et a^+ ».

PREUVE : Pfff... passer par des segments. ■

L'exercice qui suit est l'un des plus difficile de toute l'année; accrochez-vous à vos sièges.

Exercice 8. Trouver une situation où le théorème précédent s'applique de façon pertinente : sensiblement plus efficace que par passage par des segments.

3 Fonctions intégrables

3.1 Absolue convergence

La classe des fonctions d'intégrale convergente s'avère insuffisante pour avoir des théorèmes très effectifs de type « passage à la limite sous l'intégrale » ou encore (et c'est de même nature) « continuité d'une fonction définie par une intégrale ». Comme pour les séries, la convergence absolue est une petite contrainte supplémentaire qui va apporter de gros gains.

DÉFINITION 4 — Intégrabilité, absolue convergence

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$ est **intégrable sur I** ou que $\int_I f$ est **absolument convergente** lorsque $\int_I |f|$ est convergente.

4. La difficulté est de bien placer les hypothèses/conclusions quant à l'existence des différents objets. Si vous êtes corrigés par quelqu'un qui s'en fiche, pas de problème, mais sinon, c'est le massacre assuré.

Les définitions, résultats et contre-exemples de la partie précédente nous permettent d'établir les liens suivants entre les deux notions d'intégrabilité et d'intégrale convergente :

PROPOSITION 10 — Intégrale convergente vs. intégrabilité.

- Pour une fonction continue par morceaux f **positive**, il y a par définition équivalence entre « f est intégrable sur I » et « $\int_I f$ est convergente ».
- Pour une fonction de signe quelconque, l'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale (proposition 6).
- On peut trouver (on en a déjà explicité !) des fonctions dont l'intégrale est convergente, mais qui ne sont pas intégrables.

3.2 Cas de base et théorèmes de comparaison

On a vu que pour les fonctions positives (ou négatives – mais de signe fixe !), il y a **équivalence** entre l'intégrabilité et la convergence de l'intégrale. On consultera donc la partie précédente pour retrouver l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, \infty[$ et $]0, 1]$, $t \mapsto e^{-\alpha t}$, etc. Ensuite, pour traiter l'intégrabilité d'une autre fonction, on la compare souvent à un cas de base. Puisqu'il est question d'absolue convergence, on compare essentiellement des choses positives (ou leurs modules).

PROPOSITION 11 — Intégrabilité par comparaison

- Soient f, g continues par morceaux sur $[a, b[$.
 - Si $|f| \leq |g|$ au voisinage de b , alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f .
 - Si $f = O(g)$ au voisinage de b , alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f .
 - Si $f \sim g$ au voisinage de b , alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ et celle de f sont équivalentes.

REMARQUES :

- Évidemment, on peut contraposer : par exemple si $0 \leq f \leq g$ et f n'est pas intégrable, alors g ne l'est pas non plus.
- En pratique, on évitera les études systématiques aux deux bords de l'intervalle ; on évitera également les « il n'y a pas de problème en a » ou (pire) les « il n'y a pas de soucis en a ». Par contre, il est expressément demandé de signaler dès le début que la fonction en jeu est continue (par morceaux) sur $[a, b[$; ensuite, inutile de revenir sur a !

EXEMPLES :

- Pour justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ existe, on parle TOUT DE SUITE de l'application $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$, qui est continue sur $]0, +\infty[$, équivalente à \ln au voisinage de 0 donc intégrable au voisinage de 0 ; et enfin qui est négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ donc intégrable au voisinage de $+\infty$: finalement, φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Justifions l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t-1}} dt$. TOUT DE SUITE on parle de $\psi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t-1}}$: cette application est continue sur $]1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\psi(t) = o(e^{-t})$, donc ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Pour l'intégrabilité en 1, on ne pose bien pas entendu jenesaisquoi égal jenesaisquoi : on s'intéresse à $\psi(1+u)$ lorsque u tend vers 0^+ . Or $\psi(1+u) \sim \frac{e}{\sqrt{u}}$ qui est intégrable en 0^+ , donc ψ est intégrable en 1^+ , puis sur $]1, +\infty[$.
- Tout le monde a bien noté l'utilisation des lettres capitales pour les « TOUT DE SUITE »...

3.3 Stabilité de l'intégrabilité

Bien entendu, si deux fonctions sont intégrables alors leur somme, et même leurs combinaisons linéaires, le sont aussi, avec les résultats qu'on peut imaginer sur la valeur des intégrales (...). Qu'en est-il pour leur produit ?

Exercice 9. *Exhiber des fonctions f et g intégrables sur $]0, 1]$ mais de produit non intégrable. Même chose sur $[1, +\infty[$.*

En fait, concernant les produits, les choses se passent mieux pour les fonctions **de carré intégrable**, qui constituent l'ensemble désigné par $L^2(I)$. *Il n'est théoriquement plus au programme... mais ce n'est pas clair !*

Exercice 10. Montrer que si f et g sont continues par morceaux et de carré intégrable, alors leur somme est également de carré intégrable. (On pourra noter que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$.)

L'ensemble $L^2(I)$ est alors un espace vectoriel ; si on se restreint aux fonctions continues, on dispose alors d'un produit scalaire ; le résultat suivant est alors très naturel dans ce cadre.

THÉORÈME 5 — Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I , avec f^2 et g^2 intégrables. On a alors fg intégrable, avec de plus :

$$\left| \int_I fg \right| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}.$$

Si de plus f et g sont continues, alors il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

PREUVE : Pour l'intégrabilité, on peut Cauchy-Schwarziser sur des segments pour $|f|$ et $|g|$. On obtient alors à la fois l'intégrabilité et l'inégalité $\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}$ qui est plus forte que celle demandée. ■

REMARQUE : Le lecteur soigneux aura noté que pour terminer la preuve précédente (cas d'égalité), on aura eu besoin du fait que si φ est continue et intégrable sur I avec $\int_I |\varphi| = 0$, alors $\varphi = 0$.

4 Théorèmes d'interversion

4.1 Théorème de convergence dominée

On a déjà constaté (bosses glissantes) qu'on ne peut pas toujours écrire

$$\int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n,$$

même quand toutes ces limites existent et les intégrales ont un sens.

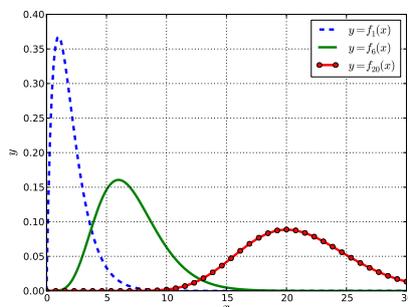


FIGURE 10 — $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$: encore une bosse qui glisse

Une première façon de s'en sortir est de prouver la convergence uniforme (quand on est sur un intervalle borné). Mais en plus de ne pas toujours être vraie, la convergence uniforme peut s'avérer pénible à montrer ; et encore, cela ne s'applique que sur un segment, pas sur $[a, +\infty[$ (et formellement, le cas $[0, 1[$ est censé être redémontré à la main). Dans de nombreuses situations, les théorèmes de la famille « convergence dominée » qui suivent fournissent un moyen efficace d'intervertir limite et intégrale (et plus si affinités).

Exercice 11. CCP 2008

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x} x^n}{n!}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f à préciser.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.
3. A-t-on $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$? Est-ce étonnant ?

Le théorème qui suit est extrêmement efficace. Il réclame un contrôle de la suite de fonctions en jeu (une **domination** par quelque chose d'intégrable) mais d'une part il s'applique dans un cadre plus large (fonctions intégrables sur un **intervalle**, plutôt que sur un **segment**) et d'autre part, il évite d'établir des convergences uniformes (dans le cas d'intervalles bornés).

THÉORÈME 6 — *Théorème de convergence dominée*

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I telles que :

- pour tout n , f_n est continue par morceaux ;
- pour tout $t \in I$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$;
- f est continue par morceaux sur I ;
- il existe φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors f et les f_n sont intégrables sur I , avec de plus :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$$

REMARQUES :

- La conclusion peut se reformuler

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n$$

On voit bien ainsi qu'il s'agit d'un théorème d'intervention de symboles ; attention tout de même à la question de l'existence des objets (intégrales et limites) : l'une est issue des hypothèses (la limite simple f), et les autres (intégrales, et limite de la suite d'intégrales) feront partie de la conclusion.

- Les vérifications de régularité sont routinières. Il faut y penser, mais c'est en général de l'ordre du constat.
- Trouver une fonction dominante est la partie demandant un peu d'initiative.

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tendant vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer la convergence de la suite de terme général

$$I_n = \int_0^2 f(t^n) \frac{1-t^n}{2+t^n} dt.$$

On trouvera $\frac{f(0)}{2} - \ell$; et on note qu'il n'y a pas de convergence uniforme (pourquoi ?).

On termine par une version « continue » (on remplace le paramètre entier n par un paramètre réel x) :

THÉORÈME 7 — *Théorème de convergence dominée – version continue*

Si F est une fonction de $[a, +\infty[\times I$ dans \mathbb{K} telle que

- pour tout $t \in [a, +\infty[$, $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $F(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(t)$;
- f est continue par morceaux sur I ;
- il existe φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I, \quad |F(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors f et les $t \mapsto F(x, t)$ sont intégrables sur I , avec de plus :

$$\int_I F(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$$

Et on peut bien entendu remplacer $+\infty$ par une borne ouverte réelle, ou travailler sur $]a, b[$ et regarder la limite en a . La preuve se ramène à la version discrète via la caractérisation séquentielle de la limite.

4.2 Intégration terme à terme

Dans le paragraphe précédent, « on a passé à la limite sous le signe intégrale ». Maintenant, on aimerait pouvoir « sommer sous le signe intégrale » : dire que l'intégrale de la somme, c'est la somme des intégrales.

Exercice 13. Énoncer précisément un théorème parlant de $\int_I (f + g)$.

THÉORÈME 8 — *Intégration terme à terme*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$ intégrables telle que $\sum f_n$ converge simplement sur I , et que la fonction somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I .

Si $\sum \int_I |f_n|$ est convergente, alors f est intégrable sur I , $\sum \int_I f_n$ converge, et :

$$\int_I \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)}_{f(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Exercice 14. Centrale 2010

Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$.

SOLUTION : L'action va se passer sur l'intervalle ouvert $I =]0, 1[$. Sur cet intervalle, on a envie d'écrire (sous réserve de justification de l'existence des objets et de l'interversion) :

$$\begin{aligned} \int_I \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx &= \int_I \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(x^2)^n}{n} \times \frac{1}{x^2} = \int_I \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^{2n-2}}{n} \\ &\stackrel{?}{=} - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I \frac{x^{2n-2}}{n} dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Maintenant convaincus que l'interversion est intéressante, on va pouvoir mettre en place soigneusement les choses.

Définissons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$: $f_n(x) = -\frac{x^{2n-2}}{n}$. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ (série entière de rayon de convergence égal à 1), et la fonction-somme vaut (sur $]0, 1[$) :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}.$$

On a donc f continue sur $]0, 1[$. Par ailleurs, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_I |f_n| = \frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_I |f_n|$ est convergente. Le théorème précédent nous assure alors que f

est intégrable sur I (c'était le premier point demandé), avec de plus $\int_I f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I f_n = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

Une décomposition en éléments simples et une minute de brassage d'air conduisent alors à :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = -2 \ln 2.$$

REMARQUE : Dans l'exemple précédent, on aurait également pu (pour se rassurer) commencer par prouver l'intégrabilité de la fonction f en jeu, en notant qu'elle est continue sur $]0, 1[$, prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1[$, et qu'au voisinage de 1 (donc lorsque u tend vers 0^+), on a : $f(1-u) = \frac{\ln(2u-u^2)}{(1-u)^2} = \frac{\ln u + O(1)}{1+o(1)} \sim \ln u$, et \ln est bien intégrable sur $]0, 1/2[$.

Exercice 15. CCP 2010

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

SOLUTION : On trouvera $-\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6} \dots$

Pour terminer ce paragraphe, notons qu'on peut se retrouver dans des situations où le théorème d'intégration précédent ne fonctionne pas, mais on s'en sort en appliquant le théorème de convergence dominée aux sommes partielles.

Exercice 16. CCP 2017

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$$

Montrer que $\sum u_n$ converge, puis : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$.

SOLUTION : Un calcul formel (suivi d'un changement de variable) nous donne la valeur de la somme. Pour justifier cela, on écrit la somme partielle comme égale à l'intégrale-objectif, plus une autre intégrale qu'on contrôle par convergence dominée.

5 Intégrales à paramètres

Exercice 17. $\frac{\sin(tx^2)}{1+t^2x^3}$ est-elle continu(e) ? Et $\int_0^1 \frac{\sin(tx^2)}{1+t^2x^3} dt$? Et $\int_0^x \frac{\sin(tx^2)}{1+t^2x^3} dt$? Et $\int_0^t \frac{\sin(tx^2)}{1+t^2x^3} dt$?

Quand même, qu'est-ce qu'on rigole...

On s'intéresse ici à des fonctions de la forme

$$F : x \in I \mapsto \int_J f(x, t) dt,$$

avec f une application de $I \times J$ dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) telle que pour tout $x \in I$, $\int_J f(x, t) dt$ convergente.

Si f est continue (comme fonction de deux variables) et que I est un segment, la continuité de F est assurée mais non évidente. Cette continuité peut même être mise en défaut dans le cas où I n'est pas un segment.

FAIT : Tout « $f(x, t)$ est continu(e) », donc F aussi » est déconseillé, sur les copies comme à l'oral.

Ce chapitre fournit des résultats assurant la continuité de F , voire son caractère \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^p . Le fil conducteur des théorèmes à venir sera l'exercice suivant :

Exercice 18. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

On va faire cet exercice en dérivant joyeusement $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$ pour trouver : $F'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x \geq 0$, ce qui donnera la valeur de F sur \mathbb{R}_+ par intégration, puis sur \mathbb{R} par imparité.

Dans la même veine :

Exercice 19. Centrale 2010

On note I l'ensemble des réels tels que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$ existe.

1. Déterminer I et montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur I .

2. Déterminer f .

SOLUTION : Ici, on trouvera

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(tx) dt = \frac{1}{1+x^2},$$

puis après deux intégrations : $f(x) = x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

5.1 Continuité

THÉORÈME 9 — *Continuité d'une intégrale à paramètre*

Soient I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une application à valeurs complexes définie sur $I \times J$ qui vérifie :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux, intégrable sur J , telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Sous ces conditions, l'application $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est (définie et) continue sur I .

PREUVE (HORS PROGRAMME) : La preuve consiste à prouver la continuité en x_0 grâce à la caractérisation séquentielle de la continuité : on montre que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 , on a $F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x_0)$.

Pour cela, on écrit $F(u_n) = \int_J f_n(t) dt$, avec $f_n : t \mapsto f(u_n, t)$; on est alors ramené au théorème de convergence dominée... ■

Ici encore, les deux premiers points sont des vérifications routinières qu'il convient de faire⁵, mais dont le statut est clairement moins important que la domination.

Voici trois situations typiques de dominations :

- **Pour un segment J** : fastoche ! Pour montrer que $x \mapsto \int_0^1 \cos(\sqrt{xt}) dt$ est continue sur \mathbb{R}^+ , la domination $|\cos(\sqrt{xt})| \leq 1$ doit faire l'affaire (une fonction constante a tendance à être intégrable sur tout segment).
- **Directement sur l'intervalle I** : la continuité sur \mathbb{R} d'une fonction telle que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ est obtenue avec la simple domination $|e^{-t^2} \cos(tx)| \leq e^{-t^2}$.
- **En localisant** : pour $F(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$, on note $f(x, t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$. Pour $t \geq 1$, on a $|f(x, t)| \leq \frac{\pi}{2t^2}$ mais pour $t \in]0, 1]$, il faut contrôler $\frac{1}{t}$ (non intégrable) en s'aidant de quelque chose tendant vers 0. La majoration $|\operatorname{Arctan}(u)| \leq |u|$ est plutôt sympathique, mais fournit $|f(x, t)| \leq |x|$ sur $]0, 1]$, qui n'est pas uniforme en x ; c'est néanmoins gagné si on choisit $x \in [-A, A]$ (A étant fixé strictement positif) puis qu'on prend comme fonction dominante⁶

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} A & \text{si } t \in]0, 1] \\ \frac{\pi}{2t^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera que cette fonction est bien intégrable.

REMARQUE : Pour montrer $\int_J f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$, on pourra utiliser le critère séquentiel de la limite, en montrant que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, on a $\int_J f(x_n, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ (et on est ramené au théorème de convergence dominée).

5. Ce sont les propriétés de régularités minimales que la conclusion réclame !

6. On évitera « dominatrice »...

Papi tape au sol avec sa canne et grommelle que de son temps, il n'y avait pas de convergence dominée en taupe, et que ce genre de continuité/limite prenait des plombs à établir...

5.2 Caractère \mathcal{C}^1

Ici, on souhaite « dériver sous le signe somme », c'est-à-dire écrire grosso-modo :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_J f(x, t) dt \right) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Comme pour la continuité, le théorème qui suit réclame de nombreuses hypothèses de régularité. À y regarder de plus près, il s'agit du strict minimum qu'on puisse exiger pour que dans la conclusion, les choses aient des chances raisonnables d'exister. On notera en particulier que pour l'existence de $\int_J f(x, t) dt$, seule l'intégrabilité est requise – sans hypothèse de domination.

THÉORÈME 10 — *Dérivabilité d'une intégrale à paramètre*

Soient I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une application à valeurs complexes définie sur $I \times J$ qui vérifie :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est (continue par morceaux et) intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- il existe une fonction φ (continue par morceaux et) intégrable sur J , telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Sous ces conditions, l'application $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est (définie et) de classe \mathcal{C}^1 sur I , avec de plus :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

PREUVE (HORS PROGRAMME) : Ici encore, on se ramène au théorème de convergence dominée en prouvant par *caractérisation séquentielle* : $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$. ■

La domination de $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|$ est parfois plus simple que celle de $|f(x, t)|$. Dans le cas de $f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$, et c'est gagné ! Finalement (comme pour les séries de fonctions), le caractère \mathcal{C}^1 peut être plus simple à établir que le caractère continu.

On adapte bien entendu le cas \mathcal{C}^1 au cas \mathcal{C}^n , la domination n'étant nécessaire que pour la dernière dérivée :

THÉORÈME 11 — *Caractère \mathcal{C}^n d'une intégrale à paramètre*

Soient I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une application à valeurs complexes définie sur $I \times J$ qui vérifie :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est (continue par morceaux et) intégrable sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^n sur I ;
- pour tout $x \in I$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est (continue par morceaux et) intégrable sur J ;
- il existe une fonction φ (continue par morceaux et) intégrable sur J , telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Sous ces conditions, l'application $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est (définie et) de classe \mathcal{C}^n sur I , avec de plus :

$$\forall x \in I \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt.$$

EXEMPLE : Prenons $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$ et définissons $f : (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\mapsto \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t}$.

Le caractère intégrable sur $]0, +\infty[$ de chaque application $t \mapsto f(x, t)$ peut se traiter via un contrôle de $|1 - \cos u|$ à l'aide de u^2 (inégalité de type Taylor-Lagrange), mais il est plus simple de montrer que g est directement de classe \mathcal{C}^2 .

C'est parti pour la check-list.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est-elle continue par morceaux sur $]0, +\infty[$? OUI. Intégrable? elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0, +\infty[$, majorée par $2e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$, donc OUI.
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est-elle de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ? OUI.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est-elle continue par morceaux sur $]0, +\infty[$? On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \cos(tx) e^{-t}$ donc OUI. Intégrable? par des arguments similaires à ceux utilisés au premier point : OUI.
- Est-ce qu'il existe une fonction φ continue par morceaux, intégrable sur $]0, +\infty[$, telle que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi(t) ?$$

Ben... la domination $|\cos(tx)e^{-t}| \leq e^{-t}$ doit faire l'affaire. Donc OUI!

Le théorème s'applique donc, et nous donne le caractère \mathcal{C}^2 , avec de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(tx) e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{(-1+ix)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{-1+ix} \left[e^{(-1+ix)t} \right]_0^T \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

5.3 La fonction Γ

DÉFINITION 5 — *Fonction Γ*

La fonction Γ est définie, pour z de partie réelle strictement positive, par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Voici une liste de propriétés classiques (portant sur la restriction de Γ à $]0, +\infty[$) :

— La fonction Γ est \mathcal{C}^∞ , avec :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- Son logarithme est convexe : $(\ln \circ \Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0$ par Cauchy-Schwarz.
- Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n! = \Gamma(n+1)$.
Accessoirement, on peut montrer que la seule fonction à logarithme convexe et prolongeant la factorielle est $x \mapsto \Gamma(x+1)$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- $\Gamma'(1) = \gamma$.
- Etc.

Exercice 20. Mines 2010

1. Rappeler la définition de la fonction Γ et montrer que, pour tout $x > 0$, la suite de terme général $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ converge vers $\Gamma(x)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n^{n+1/2} e^{-n}}{n!}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $C > 0$.
4. En utilisant les questions précédentes pour $x = \frac{1}{2}$, déterminer C .

Indications :

- What about $f_n(x) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \chi_{[0,n]}$? Convergence dominée vers et par $e^{-t} t^{x-1} \dots$
- Intégrer par parties dans $I_n(x)$.
- What about $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$? C'est équivalent à $\frac{1}{12n^2} \dots$
- Calmement, sachant que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $I_n(1/2) = \frac{2 \cdot 4^n n^{1/2} n!^2}{(2n+1)!}$, on retrouve $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5.4 Transformée de Fourier

La transformation de Fourier est un opérateur agissant sur les fonctions intégrables, et permettant essentiellement de récupérer des informations spectrales (si f est vue comme un signal, $\mathcal{F}(f)$ raconte de quoi est constitué ce signal). Selon ce qu'on veut en faire, on fait parfois agir la transformation de Fourier sur des espaces de fonctions différents (par exemple, celles de carré intégrable).

En fait, le bon cadre mathématique (les fonctions intégrables au sens de la mesure que vous verrez l'année prochaine, ou les distributions pour les professionnels) est d'intersection quasiment vide avec nos programmes, donc on ne peut pas être trop ambitieux.

DÉFINITION 6 — Transformée de Fourier

Si $f \in \mathcal{C}_M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, sa **transformée de Fourier** est l'application $\mathcal{F}(f)$ définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt.$$

On note assez souvent $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.

On va donner les principaux résultats. Les premiers sont tout à fait prouvables dans le cadre du programme... quitte à ajouter des hypothèses raisonnables (non précisées dans ce qui suit).

1. La transformation de Fourier (l'opérateur \mathcal{F}) est (bien entendu) linéaire!
2. Si f est à support compact (nulle en dehors d'un domaine borné) alors $\mathcal{F}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
3. Le résultat précédent est maintenu si f est seulement à **décroissance rapide** au voisinage de $\pm\infty$: $f(t) = o(1/t^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $g(t) = f(at)$ alors $\widehat{g}(x) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}(x/a)$.

5. Si $g(t) = f(t - t_0)$ alors $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x)e^{-ixt_0}$.
6. Si $g(t) = f(t)e^{it\alpha}$ alors $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x - \alpha)$.
7. Si $g = f_1 f_2$ alors $\widehat{g}(x) = (f_1 \star f_2)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) f_2(x - t) dt$ (« produit de convolution »).
8. Si $g = f_1 \star f_2$ alors $\widehat{g} = \widehat{f_1} \widehat{f_2}$.
9. Si $g(x) = x f(x)$ alors $\widehat{g} = \frac{i}{2\pi} \widehat{f}'$.
10. Si $g = f'$ alors $\widehat{g}(x) = ix \widehat{f}(x)$.
Les résultats suivants sortent un peu ou franchement du cadre taupinal!
11. Si $\mathcal{F}(f)$ est elle-même intégrable, alors on peut récupérer f en appliquant à $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ la « transformation de Fourier inverse », qui est proche de \mathcal{F} , modulo un facteur $\frac{1}{2\pi}$ et e^{-itx} qui devient e^{itx} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{itx} dt.$$

12. Si f est de carré intégrable sur \mathbb{R} , alors \widehat{f} aussi, et $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2$ (« identité de Parseval »).

Un point crucial de la transformation de Fourier est son caractère « réversible » (transformation de Fourier inverse) qui permet essentiellement de reconstituer un signal à partir de sa transformée de Fourier. Malheureusement, le cadre mathématique de validité est hors de portée. Dans la vraie vie, les fonctions manipulées ne sont pas forcément continues par morceaux, et les relations sont établies « presque partout », c'est-à-dire pour tout x en dehors d'un ensemble pas forcément vide, mais « de mesure nulle ».

Pour information, dans le format d'images JPEG, il y a quelque chose qui ressemble fortement à de la transformée de Fourier!

5.5 Transformée de Laplace

Si f est une application continue telle qu'il existe β_0 tel que $t \mapsto f(t)e^{-\beta_0 t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ ou \mathbb{R}_+^* (ce qui recouvre toutes les applications bornées ou les polynomiales, même multipliées par des exponentielles), on a alors $t \mapsto f(t)e^{-\beta t}$ qui est intégrable, pour tout $\beta \geq \beta_0$. Ceci permet alors de définir la transformée de Laplace sur $]\alpha, +\infty[$, avec α la borne inférieure des β tels que $t \mapsto f(t)e^{-\beta t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

DÉFINITION 7 — *Transformée de Laplace*

La **transformée de Laplace** d'une application $f \in \mathcal{C}_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ est définie (sur le domaine D décrit plus haut) par :

$$\forall p \in D \quad \mathcal{L}(f)(p) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) e^{-pt} dt.$$

Ici encore, voici les principaux résultats, les conditions d'existence des objets ou de validité des résultats étant pudiquement laissées sous le tapis :

1. L'opérateur \mathcal{L} est linéaire (bien entendu).
2. L'opérateur \mathcal{L} est injectif⁷ : si $\mathcal{L}(f) = 0$ alors $f = 0$.
3. Si f est bornée, alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ , et $\mathcal{L}(f)^{(k)} = (-1)^k \mathcal{L}(t^k f)$.
4. $\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$ et $\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$.
5. Si $f(t) = e^{at}$ alors $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p - a}$.
6. Si $f(t) = t^n$ alors $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.
7. Si $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $p\mathcal{L}(f)(p) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \ell$ (*théorème de la valeur finale*).

⁷ C'est cet argument crucial qui est utilisé « sans le dire » en SI quand on résout les équations différentielles linéaires via Laplace.

8. Si $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $p\mathcal{L}(f)(p) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \ell$ (théorème de la valeur initiale).
9. Si f est T -périodique, alors :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt.$$

C'est la conjonction des propriétés vis-à-vis de la dérivation et de l'injectivité qui fait que cette transformée est utilisée pour résoudre formellement des équations différentielles, en particulier en SI.

EXEMPLE : Pour résoudre $y'' + y' - 6y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = -1$ et $y'(0) = -18$:

- On peut commencer par expliquer qu'il y a une unique solution (avec des arguments fumeux du genre « ben mon problème, il a une unique solution donc j'aurai le droit d'utiliser le mot *unique* quand bon me semblera », ou en utilisant des vrais arguments). On la note y_0 , et on note Y_0 sa transformée de Laplace (« on sait bien qu'elle existe »).
- L'équation différentielle et les conditions initiales fournissent, par linéarité de la transformée de Laplace et grâce aux formules fournies plus haut :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad (p^2 + p - 6)Y_0(p) = -p + 17$$

(\mathcal{M} est un ensemble *Mystérieux*). On obtient ensuite (encore un voile pudique sur la façon d'obtenir cela...) :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad Y_0(p) = \frac{17 - p}{(p - 2)(p + 3)} = \frac{3}{p - 2} - \frac{4}{p + 3}.$$

- Les formules vues plus haut nous donnent $\mathcal{L}(y_0) = \frac{3}{p - 2} - \frac{4}{p + 3} = \mathcal{L}(3e^{2t} - 4e^{-3t})$.
- On conclut par **injectivité** de \mathcal{L} :

$$\forall t \in \mathcal{M}', \quad y_0(t) = 3e^{2t} - 4e^{-3t},$$

avec \mathcal{M}' un nouvel ensemble *Mystérieux* égal très exactement à ce dont on a besoin.

*Et bien entendu, les questions d'existence, d'unicité, d'analyse et de synthèse sont traitées « de tête », quand on utilise cette méthode ; *aheum*...*

Exercice 21. Déterminer avec la méthode de Laplace l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = e^t$.

De même, résoudre l'équation $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = e^{2t}$ avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.