# Suites et séries de fonctions

## 1 Modes de convergence

**Exercice 1** – *Mines 2022 [6/10] - Melvil D.*
Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0,1[$ telle que $(t_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. On définit par ailleurs, pour $n\in\mathbb{N}$ : $P_n = X^n - X^{n+1}$.

1. Donner un exemple de suite $(t_n)$ telle que $(t_n^n)$ ne converge pas vers 0.
2. Montrer que (la suite de fonctions polynomiales associées à) $(P_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. Montrer que $P_n(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. En partant de la relation
$$x^n - x^{n+1} = x^n \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{x^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k},$$
montrer d'une deuxième façon que $P_n(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 2** – *P. Bel 2023-2024 [4/10]*
Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)$ sur $[0,\pi/2]$ avec :
$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in[0,\pi/2] \qquad f_n(x) = n^\alpha \cos(x)\sin^n(x)$$

**Exercice 3** – *TPE 2017 [4/10]*

1. Montrer que si $\sum f_n$ converge, alors $(f_n)$ est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.
2. Montrer que $\sum (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

**Exercice 4** – *TPE 2017 (deux fois) [3/10]*
On définit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$ : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)$ sur $\mathbb{R}$.
2. A-t-on convergence uniforme ?
3. Prouver la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, lorsque $a>0$.

**Exercice 5** – *$x^n \ln x$ [3/10]*
Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :
$$f_n : x\in[0,1] \longmapsto \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

**Exercice 6** – *CCP 2010 [3/10]*
Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x\in\mathbb{R} \mapsto nx\mathrm{e}^{-x^2\ln n}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

**Exercice 7** – $\sin((1+1/n)x)$ *[6/10]*
Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin((1+1/n)\,x)$$

**Exercice 8** – *[5/10]*
Étudier la suite de fonctions $(f_n)$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f_n(x) = n\left(x^{1/n} - 1\right)$$

**Exercice 9** – *Mines 2015 [9/10]*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par $f_n(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \qquad f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - f_n(t)^2\right).$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)$.

**Exercice 10** – *Uniformément, pas normalement [3/10]*
Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais pas normalement.

**Exercice 11** – *IMT 2014 [5/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'on ne peut pas appliquer le théorème de dérivation à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer pourtant que pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x)$$

**Exercice 12** – *[4/10]*
Étudier la suite de fonctions définies sur $]0,\pi/2]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in ]0,\pi/2] \qquad f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}.$$

**Exercice 13** – *[5/10]*
Étudier la suite de fonctions $(f_n)$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{si } x \text{ est un entier pair} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

## 2 Régularité des sommes de séries de fonctions

**Exercice 14** – *CCP 2017 [6/10]*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$ : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\sum f_n(x)$ converge. *On note $S(x)$ la somme de cette série.*
4. Exprimer, pour $x > 0$, $S(1/x)$ en fonction de $S(x)$.
5. Étudier la continuité de $S$ sur $[0, +\infty[$.
6. Préciser la limite de $S$ en $+\infty$.

**Exercice 15** – *IMT 2017 [6/10]*
On s'intéresse à $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de $S$.
2. Montrer que $S$ est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que $\sum f_n'$ converge uniformément.
4. Montrer que $S$ est monotone sur son ensemble de définition.
5. Que dire de $S$ au voisinage de $+\infty$ ?

**Exercice 16** – *Mines 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021... [7/10]*

1. Déterminer le domaine de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
2. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
3. Donner un équivalent de $f$ en 0.

**Exercice 17** – *CCP 2016 [8/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ : $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que $F$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un équivalent de $F$ en 0 et en $+\infty$.

**Exercice 18** – *Centrale 2016 [6/10]*
On définit, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f_n : x \in I = \mathbb{R}^+ \longmapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $I$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $I$.

   *On pose, lorsque c'est défini :*

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

3. Montrer que pour tout $\alpha$, $S_\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Montrer que $S_1$ n'est pas continue en 0.
5. Montrer que pour $\alpha < 1$, $S_\alpha$ est continue en 0.

*La fin de l'exercice (mal notée par les deux qui l'ont eu...) s'intéressait à la continuité en 0...*

**Exercice 19** – *Mines 2015 [5/10]*
Soient $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Déterminer les ensembles de définition $D_1$ et $D_2$ de $f$ et $g$.
2. Étudier les limites de $f$ aux bornes de $D_1$.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de $g$.
4. Établir une relation entre $f$ et $g$ ; en déduire un équivalent de $f$ en $1^+$.

**Exercice 20** – *CCINP 2019 (2 fois) [6/10]*
On définit, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$ : $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence $D$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$.

   *On note $S$ la somme de cette série, définie donc sur $D$.*
2. A-t-on convergence normale de $\sum u_n$ sur $D$ ? Sinon, sur quels intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Montrer que pour tout $x \in D$ et tout $n \geqslant 1$, $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que $S$ est continue sur $D$.
5. La fonction $S$ est-elle intégrable sur $D$ ?

# 3 Des indications

*Exercice 1* – J'imagine que $t_n = 1 - 1/n$ fait le job. Ensuite, $|P_n|$ est maximale en $n/(n+1)$ et y vaut $O(1/n)$ ; puis : $|P_n(t_n)| \leqslant \|P_n\|_\infty$. La minoration $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_n^k \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} t_n^k \geqslant (n+1)t_n^n$ doit permettre de conclure.

*Exercice 2* – Le maximum est pris en $x_n = \mathrm{Arctan}(n)$, donc près de $\pi/2$. En ce point, $\sin^2 x_n = n \cos^2 x_n$, ce qui permet d'obtenir à la fois $\sin(x_n)$ et $\cos(x_n)$, sachant que la somme des deux carrés vaut 1.

*Exercice 3* – Je serais tenté d'écrire $f_n = R_{n-1} - R_n = (R_{n-1} - S) + (S - R_n)$. Ensuite, $f_n(x_0) = O(1/n^2)$, mais $f_n(n) = 1 + 1/n \geqslant 1$, donc $\|f_n\|_\infty \geqslant 1$...

*Exercice 4* – $f_n$ est maximale en $1/n$, où elle vaut $1/2$...

*Exercice 5* – Je trouve $\|f_n\|_\infty = O(1/n)$.

*Exercice 6* – Divergence sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ ; convergence ailleurs, uniforme sur $[1+\varepsilon, +\infty[$...

*Exercice 7* – L'inégalité des accroissements finis nous donne l'inégalité classique $|\sin u| \leqslant |u|$, puis la convergence uniforme sur $[-A, A]$. On a par ailleurs : $f_n(n\pi/2) - f(n\pi/2) = \pm 1$ donc $\|f_n - f\|_\infty \geqslant 1$.

*Exercice 8* – Il y a convergence simple sur $]0, +\infty[$ vers la fonction ln. Puisque $f_n - \ln$ n'est bornée ni au voisinage de 0 ni en celui de $+\infty$, on ne peut espérer une convergence uniforme que sur un segment de type $[\alpha, \beta]$. Sauf erreur de ma part, les variations de $f_n - \ln$ (dériver !) imposent que le maximum de la (valeur absolue de) la différence est prise au bord... donc oui, il y a convergence uniforme sur $[\alpha, \beta]$.

*Exercice 9* – Il s'agit d'une suite classique qui converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$. À $t$ fixé, on étudie $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{2}(t - x^2)$ : $[0, \sqrt{t}]$ est stable par $\varphi$, donc les $f_n(t)$ appartiennent à cet intervalle, sur lequel $\varphi(x) \geqslant x$, etc... Pour la convergence uniforme, on a :

$$0 \leqslant \sqrt{t} - f_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - f_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + f_n(t)\right)\right) \leqslant \sqrt{t}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right).$$

Ensuite, $\left|f_n(t)-\sqrt{t}\right| \leqslant \sqrt{t}\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$, et une étude de $\varphi : x \mapsto x(1-x/2)^n$ donne ensuite $\|\varphi\|_\infty \sim \dfrac{2}{\mathrm{e}n}$, ce qui permet de conclure en recollant les morceaux éparpillés !
*On a trouvé une famille d'applications polynomiales convergeant uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ ; c'est la première étape pour prouver que toute application continue sur $[0,1]$ (ou tout autre segment) peut être approchée uniformément par une suite d'applications polynomiales (« théorème de Weierstraß »).*

*Exercice 10* – Majoration classique du reste d'une série alternée. On a par ailleurs $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot$

*Exercice 11* – « Préciser $f_n'\left(\frac{1}{n}\right)$ » (indication en cours de planche).

*Exercice 12* – On a convergence simple vers 0 sur $]0,\pi/2]$. Puisque $f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} n$, ça laisse supposer qu'il n'y aura pas convergence uniforme sur $]0,\pi/2]$. De fait, $f_n(1/n)$ interdit la convergence uniforme sur $]0,\pi/2]$. Par contre, sur $S=[\alpha,\pi/2]$ on a $\|f_n\|_{\infty,S} \leqslant \dfrac{1}{n\sin^2\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$...

*Exercice 13* – Convergence simple vers la fonction nulle. Uniforme sur toute partie bornée et non uniforme sur $\mathbb{R}$.

*Exercice 14* – Sauf erreur, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}\cdots$

*Exercice 15* – Une vague connaissance des séries alternées aidera le candidat. Pour le dernier point, il me semble que le théorème de double-limite s'applique (convergence uniforme...).

*Exercice 16* – La convergence des séries dérivées est normale sur $[a,+\infty[$, d'où le caractère $\mathcal{C}^\infty$. Au voisinage de 0, une comparaison somme/intégrale fournit comme équivalent : $\dfrac{2}{x^2}\cdot$ Au fait :

```
> int(exp(-sqrt(u)),u=0..infinity);
```

$$2$$

Et en $+\infty$ ? Prolongez l'exercice...

*Exercice 17* – Il y a convergence normale sur $[-A,A]$ (mais pas sur $\mathbb{R}$, au passage : regarder $f_n(n)$). À $n$ fixé, on a $\dfrac{f_n(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^2}$ quand $x$ tend vers 0, et on a alors sans problème (majoration de la différence, ou double-limite)

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad (=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6})$$

Ensuite, toujours à $n$ fixé, on a $f_n(x) \sim \dfrac{1}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$. La série $\sum \frac{1}{x}$ étant divergente, on évalue alors plutôt $f(x)$ par une comparaison somme/intégrale, qui donne : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}\cdot$

*Exercice 18* – $\|f_n\|_\infty = f_n(1/n) = \dfrac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}\cdots$ En question subsidiaire, on pourra vérifier que $S_0$ n'est PAS continue en 0.

*Exercice 19* – Pour $f$, c'est dans le cours ! Alors que $f$ est définie sur $]1,+\infty[$, l'application $g$ l'est sur $]0,+\infty[$, et le contrôle du reste d'une série alternée est omniprésent pour les convergences uniformes. Enfin, avec le bricolage habituel consistant à faire apparaître/disparaître les termes d'indice pair, on obtient $g(x) = f(x)\left(1-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)$ fournissant (continuité de $g$ en 1) facilement un équivalent de $f$ en $1^+$ ; équivalent qu'on pourrait également établir par une comparaison somme-intégrale comme dans le cours (bon, OK je le donne : $f(1+u) \sim \dfrac{1}{u}$).

*Exercice 20* – Il y a convergence simple sur $[1,+\infty[$. Le maximum de $u_n$ est pris en $\mathrm{e}^{1/n}$ et vaut $\dfrac{1/\mathrm{e}}{n\ln n}$, donc il n'y a pas convergence normale sur $[1,+\infty[$ ou même sur $]1,+\infty[$, mais il y aura convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ avec $a>1$. La majoration proposée (qui donnera la convergence uniforme donc la continuité) s'obtient en majorant tous les $\dfrac{1}{\ln k}$ par $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ d'une part, et en notant que l'inégalité bien connue $\ln(1+u)\leqslant u$ se translate en $\ln(x)\leqslant x-1$... Pour la dernière question, on peut s'intéresser à $x^2S(x)$ au voisinage de $+\infty$. Il y a convergence normale de la série en jeu sur $[2,+\infty[$ par exemple, et le théorème de la double limite s'applique pour nous donner : $S(x)=o(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$.