

Séries entières

« "Je suis le roi du monde", s'est écrié un farfelu en sautant royalement dans la fosse aux tigres du zoo d'Oklahoma City. L'instant d'après, il abdiquait. » – P. Desproges

Table des matières

1	Domaine de convergence d'une série entière	2
1.1	Quelques exemples significatifs	2
1.2	Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence	2
1.3	Convergence d'une série entière en dehors du cercle	3
1.4	Outils pour calculer le rayon de convergence	3
2	Régularité de la somme	5
2.1	Continuité à l'intérieur	5
2.2	Primitivisation	5
2.3	Caractère C^∞	6
3	Développement en série entière (au voisinage de 0)	7
3.1	Fonctions développables en série entière	7
3.2	Unicité, série de Taylor	8
3.3	Des fonctions développables en série entière	8
3.4	Deux exemples de variable complexe	10
4	Quelques applications	11
4.1	Calculs de somme	11
4.2	Équations différentielles	11
4.3	Séries génératrices pour le dénombrement	12
4.4	Fonctions génératrices pour les probabilités	13



DÉFINITION 1 — *Séries entières*

|| Une **série entière** est une série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$.

REMARQUE : Oui, bon, on devrait dire $\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto a_n x^n \dots$. Par ailleurs, la notation $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n z^n$ indique implicitement si l'on s'intéresse plutôt à une variable réelle ou complexe.

Les points qui nous intéresseront :

- Quel est le domaine de convergence d'une telle série de fonctions ?
- Sur ce domaine – *et ses sous-domaines* – quel est le mode de convergence (est-elle simple, uniforme, normale) ?
- Quelle est la régularité de la fonction somme ?
- Réciproquement, une fonction donnée peut-elle s'écrire comme la somme d'une série entière ?
- À quoi ça sert ?

Les (fonctions associées aux) séries entières vont naturellement de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , mais on s'intéressera souvent à leur restriction à \mathbb{R} , en particulierité pour les questions de régularité (au delà de la continuité).

1 Domaine de convergence d'une série entière

Exercice 1. Pour quels $r \geq 0$ les suites suivantes sont-elles bornées ?

$$(r^n)_n \quad (nr^n)_n \quad \left(\frac{r^n}{n}\right)_n \quad \left(\frac{2^n r^n}{n^3}\right)_n \quad \left(\frac{n^3 r^n 3^n}{\ln^5 n}\right)_n$$

Exercice 2. Pour quels $r \geq 0$ les suites suivantes sont-elles convergentes ?

$$(r^n)_n \quad (nr^n)_n \quad \left(\frac{r^n}{n}\right)_n \quad \left(\frac{2^n r^n}{n^3}\right)_n \quad \left(\frac{n^3 r^n 3^n}{\ln^5 n}\right)_n$$

Exercice 3. Pour quels $r \geq 0$ les séries suivantes sont-elles convergentes ?

$$\sum_n r^n \quad \sum_n nr^n \quad \sum_n \frac{r^n}{n} \quad \sum_n \frac{2^n r^n}{n^3} \quad \sum_n \frac{n^3 r^n 3^n}{\ln^5 n}$$

1.1 Quelques exemples significatifs

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum n^2 z^n$ est convergente. Même chose avec $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum \frac{z^{(n^2)}}{n}$ est convergente.

On voit sur l'exemple précédent que ce qui est délicat se passe sur une toute petite zone... qui sera finalement sans importance (pour nous!).

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum n! z^n$ est convergente. Même chose avec $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum \frac{999^n}{n^{42}} z^n$ est convergente.

1.2 Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence

THÉORÈME 1 — « *Lemme d'Abel* »

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

PREUVE : Écrire $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ et comparer des séries à termes positifs. ■

L'ensemble

$$\mathcal{E} = \{r \geq 0; (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$$

est potentiellement réduit à $\{0\}$ (penser à $\sum n!z^n$) ou égal à \mathbb{R}_+ tout entier (penser à $\sum \frac{z^n}{n!}$), mais ne peut pas être égal à n'importe quoi : si $0 < r_0 < r_1$ et $r_1 \in \mathcal{E}$, alors $r_0 \in \mathcal{E}$ (bref, \mathcal{E} est un intervalle de la forme $[0, R]$, $[0, R[$ ou $[0, +\infty[$). Si \mathcal{E} n'est pas majoré (donc est égal à \mathbb{R}^+), alors $\sum a_n z^n$ converge (absolument) pour tout complexe z . Mais si ce n'est pas le cas, il va y avoir un changement brutal selon la position de $|z|$ par rapport à la borne supérieure de \mathcal{E} .

DÉFINITION 2 — *Rayon de convergence*

Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure (dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) de l'ensemble (non vide) des $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 8. Déterminer les rayons de convergence des séries entières rencontrées dans les exercices numérotés de 4 à 7.

1.3 Convergence d'une série entière en dehors du cercle

En pratique, le domaine de convergence d'une série entière est très simple, pour peu qu'on ne regarde pas de trop près le bord :

THÉORÈME 2 — *Convergence absolue vs. divergence grossière*

Si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut $R \in]0 + \infty[$, alors :

- la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$;
- elle diverge grossièrement pour $|z| > R$.

PREUVE : Le premier point est conséquence de la définition du rayon de convergence et du lemme d'Abel (coincer r strictement entre $|z|$ et R : $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée...). Pour le second point, $(a_n z^n)$ n'est pas bornée par définition du rayon de convergence. ■

REMARQUES :

- Bien entendu, si $R = 0$, la série diverge grossièrement sauf pour $z = 0$; et si $R = +\infty$, alors il y a convergence absolue pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- La question de la convergence des séries entières sur le cercle est tout à fait intéressante... et hautement non triviale! Laissons cela aux professionnels.

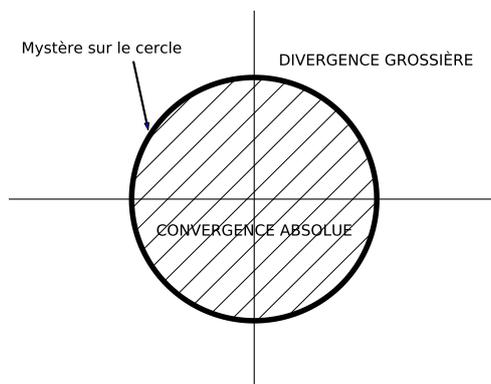


FIGURE 1 – Domaine de convergence d'une série entière

1.4 Outils pour calculer le rayon de convergence

Le premier des outils est le cerveau (associé à une connaissance de la définition du rayon de convergence, et non d'une vague propriété). Bien souvent, se poser la question « pour quels $r \geq 0$ la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ? » est quasiment suffisant (il peut y avoir un doute sur l'appartenance ou non d'UNE valeur à l'ensemble, ce qui est sans importance pour trouver la borne supérieure).

Ensuite, on a les résultats suivants, explicitement au programme :

PROPOSITION 1 — Rayons de convergence de séries entières que l'on compare

- Soient R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
- si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
 - si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

PREUVE : Notons \mathcal{E}_a (respectivement \mathcal{E}_b) l'ensemble des $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement $(b_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$) est bornée.

- Si $a_n = O(b_n)$ et $(b_n r^n)$ est bornée alors $(a_n r^n)$ aussi, donc $\mathcal{E}_b \subset \mathcal{E}_a$, donc $R_b \leq R_a$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_a$, donc $R_b = R_a$.

■

L'exemple suivant nous dit que pour les calculs de rayon de convergence, *on n'est pas à une vache près !*

EXEMPLE : Si $\frac{1}{n^{999}} \leq |u_n| \leq n^{999}$, alors le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$ vaut 1.

Les résultats qui suivent sont très utiles, sans être clairement au programme : il faut être capable de les établir si besoin est.

PROPOSITION 2 — Des cas classiques à connaître

- On s'intéresse au rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$.
- Si $u_n = P(n)$ avec P une application polynomiale (ou un quotient de telles applications ; bref : une application rationnelle), alors $R = 1$.
 - Si $u_n = P(n)\alpha^n$ avec P polynomiale (ou rationnelle) et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors $R = \frac{1}{|\alpha|}$.
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (en particulier si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$), alors $R \geq 1$.
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \neq 0$, alors $R = 1$.

PREUVE : Revenir à la définition...

■

On pourra aussi utiliser la règle de d'Alembert¹ pour les séries :

PROPOSITION 3 — Règle de d'Alembert pour les séries – rappel

- Supposons que $\sum u_n$ est une série à termes non nuls tels que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$.
- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
 - Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ; plus précisément, $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

EXEMPLE : On s'intéresse à la série entière $\sum \frac{(2n)!}{n!^2} z^n$. On fixe $r > 0$ et on pose $u_n = \frac{(2n)!}{n!^2} r^n$. Après calcul, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4r$, donc :

- si $r < \frac{1}{4}$, la série $\sum u_n$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 donc est borné ;
- si $r > \frac{1}{4}$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum \frac{(2n)!}{n!^2} z^n$ vaut $\frac{1}{4}$. *Et on voit que le cas limite $r = 1/4$ était sans importance.*

Il existe une version « séries entières » que je déconseille (sans interdire) :

PROPOSITION 4 — Règle de d'Alembert pour les séries entières

- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in]0, +\infty[$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{\ell}$.

Attention, cette règle ne pourra s'appliquer que si les coefficients de la série entière ne s'annulent pas, hypothèse que vous n'oublierez pas d'oublier...

1. Impossible de résister : mon correcteur orthographique me propose de corriger ce mot barbare en « camembert » !

EXEMPLES :

- On obtient directement le rayon de convergence de $\sum \frac{(2n)!}{n!^2} z^n$.
- Lorsque $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$ (cf. $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum n!z^n$), on conclut comme on imagine.

Enfin, on termine avec quelques propriétés simples mais utiles :

PROPOSITION 5 — Rayon de convergence d'une somme et d'un produit de Cauchy

- Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont pour rayons de convergence respectivement $R_a > 0$ et $R_b > 0$, alors :
- le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vaut **au moins** $\text{Min}(R_a, R_b)$;
 - le rayon de convergence du produit de Cauchy $\sum_n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ vaut **au moins** $\text{Min}(R_a, R_b)$;

PREUVE : Pour la somme : avec les notations déjà rencontrées, si $r \in \mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_b$, alors $((a_n + b_n)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Pour le produit : si $r < \text{Min}(R_a, R_b)$, alors d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n r^n$ et $\sum b_n r^n$ sont absolument convergents, donc leur produit de Cauchy aussi. Le terme général de ce produit de Cauchy est donc borné. Or il vaut $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} r^n \dots$ ■

REMARQUE : Le rayon d'une somme ou d'un produit peut être strictement supérieur au minimum des deux rayons : penser à $(1-x) \sum x^n$ pour le produit...

2 Régularité de la somme

2.1 Continuité à l'intérieur

THÉORÈME 3 — Continuité de la somme d'une série entière sur $] -R, R[$

- Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors l'application somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est (définie et) continue sur (au moins) $] -R, R[$.

PREUVE : On localise, en fixant $\alpha \in]0, R[$ et on note $f_n : x \mapsto a_n x^n$. On va montrer que S est continue sur $[-\alpha, \alpha]$. Pour cela, on note que α est dans le disque ouvert de convergence, donc $\sum a_n \alpha^n$ est absolument convergente. Mais $\|f_n\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]} = |a_n| \alpha^n$, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$. Comme chacune des f_n est continue, la fonction somme est continue sur $[-\alpha, \alpha]$. Comme ceci est vrai pour tout $\alpha < R$, f est continue sur $] -R, R[$. ■

REMARQUE : Si on s'intéresse à la fonction induite par la série entière sur \mathbb{C} , alors elle est définie (au moins) sur le disque ouvert centrée en 0 et de rayon R , et est continue sur le disque ouvert pour les mêmes raisons que sur $] -R, R[$: convergence normale sur tout disque fermé $D_f(0, r)$ strictement inclus dans le disque ouvert de convergence $D_o(0, R)$. Ce résultat est au programme... et admis.

2.2 Primitivisation

PROPOSITION 6 — Rayon de convergence d'une primitive formelle de série entière

- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R , alors la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{p \geq 1} \frac{a_{p-1}}{p} z^p$ a pour rayon de convergence R .

PREUVE : Notons R_a le rayon de convergence de la série initiale, et R_b celui de la « série primitive » $\sum b_p z^p$, avec $b_p = \frac{a_{p-1}}{p}$ pour $p \geq 1$.

- si $0 < r < R_a$, alors il existe K tel que pour tout n , $|a_n| r^n \leq K$; on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |b_n r^n| = |a_{n-1}| r^{n-1} \times \frac{r}{n} \leq K r,$$

donc $(b_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $r \leq R_b$. Ceci étant vrai pour tout $r < R_a$, on a donc² $R_a \leq R_b$ (les sceptiques peuvent prendre $r = R_a - 1/n$ puis faire tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue).

2. Évidemment, tout est dans la quantification : quand $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \leq \gamma$, on ne peut en général rien dire sur β vis à vis de γ !

— Supposons l'inégalité stricte : $R_a < R_b$; et coinçons r_1 et r_2 ainsi : $R_a < r_1 < r_2 < R_b$.



La suite $(b_n r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par définition de R_b : il existe K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| r_2^n \leq K$. On écrit alors :

$$|a_n r_1^n| = |(n+1)b_{n+1}| r_1^n = |b_{n+1}| r_2^{n+1} \times (n+1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \times \frac{1}{r_2} \leq \frac{K}{r_2} (n+1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $r_1 < r_2$. Ainsi, $R_a < r_1$ et $(a_n r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, ce qui est en contradiction avec la définition de R_a .
Finalement : $R_a = R_b$.

Le résultat de cet énoncé (et la preuve!) reste valable si $R = 0$ ou $R = +\infty$. ■

THÉORÈME 4 — Primitive d'une somme de série entière

Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ possède pour primitive sur $] -R, R[$ la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_{p-1}}{p} x^p$.

PREUVE : On se place sous les hypothèses de l'énoncé. La fonction somme est donc continue sur $] -R, R[$ et possède pour primitive (entre autres!) l'application

$$T : x \mapsto \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt.$$

Il serait tentant d'intervertir les deux symboles...

Si seulement on pouvait avoir convergence uniforme...

Et pour cela, si seulement on avait convergence normale sur le **segment** $[0, x]$ (x est fixé dans $]0, R[$)... ■

2.3 Caractère \mathcal{C}^∞

Dans le paragraphe précédent, on a vu qu'on peut primitiver formellement une série entière, et on obtient alors un étage plus haut une série entière de même rayon de convergence, et dont la fonction-somme est une primitive de la fonction initiale. Si on dit la même chose en prenant un étage de hauteur et en regardant vers le bas, on obtient :

THÉORÈME 5 — Dérivation des (sommes de) séries entières

Si $\sum \alpha_n z^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$ alors
 — la série dérivée $\sum_{n \geq 1} n \alpha_n x^{n-1} = \sum (p+1) \alpha_{p+1} x^p$ possède pour rayon de convergence R ;
 — la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ est dérivable sur $] -R, R[$;
 — pour tout $x \in] -R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n x^{n-1}$.
 Bref : « On peut dériver terme à terme une série entière. »

PREUVE : Prendre $a_n = (n+1)\alpha_{n+1}$ et appliquer d'abord la proposition 6 puis le théorème 4! ■

COROLLAIRE : Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$; de plus, si $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p -ième de f s'obtient en dérivant formellement p fois la série initiale :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{p+k} \frac{(p+k)!}{k!} x^k.$$

En particulier, $f^{(p)}(0) = a_p \times p!$

REMARQUE : Le dernier point se lit vraiment dans les deux sens : certes, il donne les dérivées en 0 à l'aide des a_n , mais réciproquement, si ce qui est connu est la fonction somme elle-même, alors, les a_n sont imposés par cette fonction et ses dérivées.

Exercice 9. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$. On admet³ que f est de classe C^∞ , avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

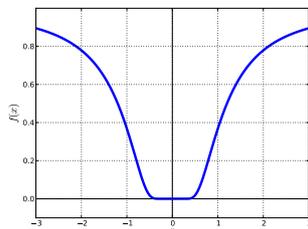


FIGURE 2 – Une fonction dite *plate* – et on comprend pourquoi

Montrer que f n'est la somme d'une série entière sur aucun intervalle non trivial $] -r, r[$.

3 Développement en série entière (au voisinage de 0)

3.1 Fonctions développables en série entière

Les séries entières nous offrent des fonctions de classe C^∞ . Le dernier exercice nous dit que réciproquement, une fonction de classe C^∞ n'est pas forcément, même localement, la somme d'une série entière.

DÉFINITION 3 — *Fonction développable en série entière*

|| Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **développable en série entière** sur $] -r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ dont f est la somme sur $] -r, r[$.

On dispose déjà de quelques exemples :

EXEMPLES :

— La fonction exponentielle est développable en série entière sur \mathbb{R} (et même sur \mathbb{C}) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

— La fonction $x \in] -1, +\infty[\mapsto \frac{1}{1+x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$:

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

— Grâce aux théorèmes de primitivisation/dérivation, on sait que $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$, avec :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p.$$

En contrôlant le reste d'une série alternée comme on imagine, on montre que la série en jeu converge uniformément sur $[0, 1]$, ce qui permet d'étendre cette relation en 1.

3. Bon exercice !

— De même, la fonction Arctan a une dérivée développable en série entière au voisinage de 0 :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arctan}'x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Ainsi, Arctan est développable en série entière, avec :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Avec le même type de démarche que pour la fonction ln vue plus haut, on peut étendre cette relation en $\frac{\pi}{4}$.

— La fonction plate de l'exercice 6 n'est pas développable en série entière.

REMARQUE : Il n'y a pas de lien direct simple entre le domaine de convergence de la série entière et le domaine de définition de la fonction qu'on développe : en regardant Arctan ou $x \mapsto \ln(1+x)$ on voit une inclusion stricte dans un sens. Pour l'autre sens, c'est moins clair (les fonctions usuelles développables en série entière coïncident avec la somme de cette série « tant que cette série converge ») ; mais on peut choisir par exemple la fonction exponentielle, et changer sa valeur au delà de $[-1, 1]$: la fonction ainsi construite est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini, mais la série et la fonction ne coïncident que sur $[-1, 1]$.

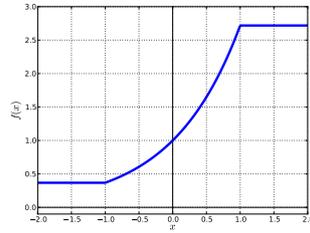


FIGURE 3 – Ce bidule est développable en série entière

3.2 Unicité, série de Taylor

Étant donnée une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0, existe-t-il des a_n tels que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence strictement positif, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$? L'existence n'est pas toujours acquise, mais on a vu que si cette série existe, alors elle est **unique**, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n! \times a_n$.

DÉFINITION 4 — Série de Taylor d'une fonction \mathcal{C}^∞

|| Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ définie au voisinage de 0. Sa **série de Taylor en 0** est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ainsi, lorsque f est de classe \mathcal{C}^∞ , on peut reformuler la question « f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? » en « f coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0 ? »

3.3 Des fonctions développables en série entière

Commençons par signaler des propriétés aussi raisonnables qu'utiles. Pour justifier qu'une fonction est développable en série entière, nous aurons essentiellement ces résultats, ainsi que le recours aux fonctions de référence, et aux théorèmes de dérivation/primitivisation.

PROPOSITION 7 — Somme et produit de fonctions développables en série entière

| Si deux fonctions sont développables en série entière, alors leur somme et leur produit aussi.

PREUVE : Conséquence des résultats généraux sur les sommes et produits (de Cauchy) de séries entières. Le résultat est évidemment encore valable pour des combinaisons linéaires. ■

Outre les exemples et techniques déjà vu(e)s, voici les autres fonctions pour lesquelles il faut connaître⁴ l'existence et la valeur du développement en série entière au voisinage de 0.

PROPOSITION 8 — Des développements en série entière à connaître

— Variations autour de l'exponentielle : pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} & \sinh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

— Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour $x \in]-1, 1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\text{avec } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

PREUVE : Les premiers résultats s'obtiennent en partant de l'exponentielle, par demi-sommes ou demi-différences, quitte à multiplier/diviser par i . Au passage, ceci montre que « on peut prendre la partie réelle/imaginaire/paire/impair d'un développement en série entière » (et NON, je ne donnerai pas d'énoncé précis sur le sujet).

Pour $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$, on commence par déterminer la série de Taylor : puisque $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n$, on a bien $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$, ce qui donne la forme nécessaire de la série entière (celle annoncée dans la proposition).

Considérons donc la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Puisque $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$, le rayon de convergence vaut 1, et on peut définir $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Pour montrer que $f = g$, on va montrer que g vérifie la même relation différentielle que f , à savoir : $f' = \frac{\alpha}{1+x} f$. Les propriétés usuelles des sommes de série entière nous assurent que g est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, avec :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)g'(x) - \alpha g(x) = \cdots = (a_1 - \alpha a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-\alpha)a_n + (n+1)a_{n+1}) x^n,$$

et tous ces coefficients sont nuls⁵. Ainsi, $g' = \frac{\alpha}{1+x} g$ sur $] -1, 1[$, avec $g(0) = a_0 = 1$, donc g est bien l'application $x \mapsto (1+x)^\alpha$. ■

On dispose maintenant d'assez de résultats pour traiter des situations variées.

Exercice 10. Développer en série entière au voisinage de 0 l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUTION : Pour $x \in]-1, 1[$, on a $x^2 \in [0, 1[$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n},$$

ce qui prouve que la fonction demandée est bien développable en série entière (et les fanatiques pourront bidouiller pour transformer $\binom{-1/2}{n}$ en produit/quotient de factorielles...).

Exercice 11. Développer en série entière au voisinage de 0 l'application $x \mapsto \frac{1}{1+x-2x^2}$.

4. Ou retrouver très vite.

5. NON, le calcul n'est pas à faire de tête...

SOLUTION : On décompose en éléments simples, puis on fait apparaître des expressions de la forme $\frac{1}{1-u}$, qu'on peut développer comme des sommes de séries lorsque $|u| < 1$, c'est-à-dire ici $x < \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{(1+2x)(1-x)} = \frac{1/3}{1-x} + \frac{2/3}{1+2x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (-2)^{n+1}) x^n.$$

Exercice 12. Développer en série entière au voisinage de 0 l'application $x \mapsto e^x \sin x$.

SOLUTION : Il s'agit d'un produit de deux fonctions développables en série entière sur \mathbb{R} . Ceci dit, on a modérément envie de calculer un produit de Cauchy, donc on va plutôt voir la fonction comme la partie imaginaire de $g : x \mapsto e^{(1+i)x}$. Ensuite, il est question de la partie imaginaire de $(1+i)^n = \sqrt{2}^n e^{ni\pi/4}$...

Exercice 13. Développer en série entière au voisinage de 0 l'application Arccos .

SOLUTION : La fonction Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ est dérivable sur $] -1, 1[$, et a sa dérivée développable en série entière sur ce même intervalle ; yapluka primitiver !

Exercice 14. Déterminer le domaine de convergence et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

SOLUTION : Ça nous rappelle vaguement des développements de fonctions connues ; si seulement il pouvait être question de x^{2n} et non de x^n ... Ceci dit :

$$5^n = \sqrt{5}^{2n} \quad \text{et} \quad (-5)^n = (-1)^n \sqrt{5}^{2n}.$$

Grâce à ces subtiles considérations, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

REMARQUE : Voici deux derniers résultats raisonnables mais tout à fait hors programme :

- si f est développable en série entière sur $] -r, r[$, alors $x \mapsto e^{f(x)}$ également ;
- si f est développable en série entière sur $] -r, r[$ avec $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est également développable en série entière (mais pas forcément sur tout l'intervalle $] -r, r[$).

D'une façon générale, la composée de deux fonctions développables en séries entière l'est aussi, mais c'est encore plus hors-programme !

3.4 Deux exemples de variable complexe

Les deux seules fonctions à variable complexe qui sont au programme sont déjà bien connues...

PROPOSITION 9 — Deux fonctions d'une variable complexe

- pour $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$;
- pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

Exercice 15. Montrer que pour tout z tel que $|z| < 1$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-2}{n} z^n$.

Signalons un résultat qui permet de prouver (autrement) l'unicité du développement en série entière : plutôt que de dériver f en 0, on va l'intégrer sur un cercle au voisinage de l'origine.

Exercice 16. Montrer que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0 avec pour tout $z \in D(0, R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in]0, R[, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta.$$

SOLUTION : Coincer r' entre r et R pour obtenir un contrôle de la forme $|a_n r^n| = o(1/n^2)$. La convergence normale permet alors d'invertir la somme et l'intégrale...

4 Quelques applications

4.1 Calculs de somme

Parfois, pour calculer une somme, il peut être tentant d'introduire une série entière.

Exercice 17. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

SOLUTION : La convergence de cette série ne pose pas de problème. Pour calculer la valeur, on peut faire intervenir $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$: la théorie générale nous dit que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, et la somme recherchée vaut $\frac{1}{2}\varphi' \left(\frac{1}{2} \right)$, c'est-à-dire 2.

Il faut parfois un peu plus travailler, comme par exemple pour $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$: on va naturellement faire intervenir $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$, de sorte que $S = f(1)$. Mais le rayon de convergence est égal à 1, donc on ne peut écrire $f'(x) = \dots = \frac{1}{1+x^4}$ que sur $[0, 1[$ a priori, donc il y a un peu de travail pour aller jusqu'à 1 ! La convergence uniforme de la série (contrôle du reste d'une série alternée) doit permettre de s'en sortir.

4.2 Équations différentielles

On peut chercher des solutions d'équations différentielles développables en série entière (la théorie ne nous assure pas l'existence de telles solutions, mais il n'est pas interdit d'en chercher, surtout si on nous y invite!). Le principe est toujours le même :

- dans une phase d'analyse, on établit la valeur **nécessaire** d'un **éventuel** développement en série entière d'une solution, en général via une relation de récurrence et des premiers termes plus ou moins imposés par les conditions initiales ;
- dans la phase de synthèse, on montre que la série entière « candidate » a un rayon de convergence strictement positif, puis vérifie l'équation différentielle (avec les bonnes conditions initiales).

Exercice 18. Trouver les solutions de

$$xy'' + y' - xy + 1 = 0$$

développables en série entière.

SOLUTION :

- **Analyse** : supposons qu'on dispose d'une solution sous la forme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in] -r, r[$ avec $r > 0$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières nous dit que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ et $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$ pour tout $x \in] -r, r[$. On a donc, après un petit travail algébrique sur les sommes :

$$\forall x \in] -r, r[, \quad (1 + a_1) + (4a_2 - a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - a_{n-1}) x^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \times x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, « on peut identifier les coefficients » : $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{4}a_0$ (cas particulier de la relation qui va suivre) et pour tout $n \geq 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} a_{n-1}$. Ainsi, la valeur de tous les a_n est donnée par a_0 (pour n pair) et imposée pour n impair (a_1 est imposé, ainsi que tous ses « bi-successeurs »!).

- **Synthèse** : Fixons un réel A , et définissons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les valeurs $a_0 = A$, $a_1 = -1$, et la relation $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)^2} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que l'application $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur un voisinage de 0 (en fait, \mathbb{R} !) et solution de l'équation différentielle.

- Pour la définition, on montre que le rayon de convergence de la série entière est infini en considérant $u_n = a_n r^n$, à $r > 0$ fixé. On a $\frac{u_{n+2}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $u_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ et $u_{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ (« d'Alembert pour les suites »), donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, le rayon de convergence est infini.
- On peut maintenant dire que g est de classe \mathcal{C}^∞ et dériver joyeusement sous les signes sommes : on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xg''(x) + g'(x) - xg(x) + 1 = \dots = (1+a_1) + (4a_2 - a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - a_{n-1}) x^n.$$

Mais par construction, tous ces termes sont nuls, et g est donc solution de l'équation différentielle.

Ainsi, il existe une infinité (plus précisément, une droite affine) de solutions développables en série entière.

Exercice 19. Déterminer les solutions de $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$ développables en série entière.

SOLUTION : On trouvera cette fois deux degrés de liberté.

4.3 Séries génératrices pour le dénombrement

Lorsqu'une suite vérifie une relation de récurrence plus ou moins simple, on peut parfois calculer tous les termes de la suite « en même temps », en les regroupant dans une série entière !

EXEMPLE : Considérons la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse alors à sa *série génératrice* $\sum f_n x^n$. Déjà, son rayon de convergence R est strictement positif ($f_n \leq 2^n$ par récurrence immédiate, donc $R \geq \frac{1}{2}$); on peut donc considérer la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n, \text{ définie au moins sur }]-1/2, 1/2[.$$

La relation $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, une fois multipliée par x^{n+2} et sommée de 0 à l'infini (tout le monde converge) fournit :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) - (x+0) = x^2 f(x) + x(f(x) - 0),$$

puis :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

On décompose ensuite $f(x)$ en éléments simples après avoir factorisé le dénominateur, et on obtient des termes qu'on peut décomposer en série entière, puis on conclut par unicité du développement.

Parfois, le rayon de convergence ne peut pas être déclaré strictement positif « à vue », donc il faut un peu plus travailler.

Exercice 20. La suite de Catalan est définie par son premier terme $C_0 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

Déterminer une formule « simple » pour C_n .

SOLUTION : Le rayon de convergence de la série entière $\sum C_n x^n$ n'est pas clairement strictement positif. On va donc devoir en faire l'hypothèse dans une première phase d'analyse.

- **Analyse :** On suppose que le rayon de convergence R est strictement positif, et on définit alors, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$. La relation de récurrence, une fois multipliée par x^{n+1} puis sommée pour $n \in \mathbb{N}$, fournit (on détecte un produit de Cauchy) :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) - 1 = x f(x)^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$, il existe $\varepsilon_x \in \{-1, 1\}$ tel que $f(x) = \frac{1 + \varepsilon_x \sqrt{1 - 4x}}{2x}$. La fonction $x \mapsto \varepsilon_x$ est continue sur $]0, R[$ (l'exprimer à l'aide de f !) et est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc est constante. Or si on avait $\varepsilon_x = 1$ pour tout $x \in]0, R[$, on aurait $f(x)$ équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+ , ce qui est impossible par continuité de f en 0. Ainsi (le raisonnement étant le même sur $] -R, 0[$) :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ C_0 = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

— **Synthèse** : Considérons la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Cette fonction n'est pas

clairement développable en série entière, mais le numérateur l'est. Et comme on peut factoriser x dans le développement (obtenu après tout de même un peu de travail, et valable sur $] -1/4, 1/4[$), on peut même étendre le résultat à $x = 0$:

$$\forall x \in]-1/4, 1/4[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

avec $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Maintenant, la relation $xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$ exprimée sous forme de série entière nous assure, par unicité du développement en séries entières, que $a_0 = 1$ (certes...) mais surtout : $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont donc le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence, donc sont égales (récurrence à peu près immédiate, mais avec prédécesseurs ; ceux qui se savent fragiles sur la question sont invités à détailler la preuve).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

REMARQUES :

- C_n correspond au nombre de façon de placer correctement n paires de parenthèses dans une expression : pour $n = 3$, il y en a $C_3 = 5$: $()()()$, $(())()$, $((()))$, $()(())$ et $(())()$
- Avec ce point de vue, on peut montrer directement que $C_n \leq 4^n$, ce qui fournit $R \geq 1/4$, et permet alors de gagner un peu de temps.
- C_n désigne aussi le nombre d'« arbres binaires à n nœuds » :

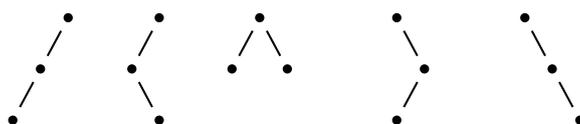


FIGURE 4 – Les $C_3 = 5$ arbres binaires à 3 nœuds

- On pourra consulter les exercices de TD, où deux cas très classiques sont traités via des séries génératrices : le nombre de « dérangements » (i.e. : permutations sans points fixes) d'une part, et le nombre de partitions d'un entier d'autre part.

4.4 Fonctions génératrices pour les probabilités

Il existe enfin des séries génératrices⁶ qui interviendront dans le cours de probabilités sur les variables aléatoires. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Puisque $\sum \mathbb{P}(X = n)$ est convergente (de somme égale à 1), la série $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ a un rayon de convergence minoré par 1, et il y a même convergence absolue de la somme sur tout le segment $[-1, 1]$ (un petit peu mieux donc que ce qu'on a dans le cas général d'un rayon égal à 1).

6. Mais dans ce contexte on les appelle plutôt « fonctions génératrices ».

DÉFINITION 5 — Fonction génératrice d'une variable aléatoire

La **fonction génératrice** d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} est définie sur le domaine D de convergence (qui contient au moins $[-1, 1]$) par :

$$\forall t \in D \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Exercice 21. Calculer la série génératrice d'une variable suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) puis une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ ($X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

SOLUTION : On trouvera respectivement $\frac{pt}{1 - (1-p)t}$ et $e^{\lambda(t-1)}$.

Lorsque le rayon de convergence est strictement plus grand que 1, on a directement l'espérance de la variable aléatoire : c'est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = G'_X(1).$$

En fait, lorsque le rayon vaut 1, la convergence de cette série est équivalente à la dérivabilité (à gauche) de G_X en 1.

De même, sous ces conditions, la fonction caractéristique permettra de récupérer les différents moments ($\mathbb{E}(X^k)$), donc la variance. Par exemple, sous conditions d'existence, $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Exercice 22. Déterminer l'espérance et la variance d'une variable suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ puis une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

SOLUTION : Pour la loi géométrique : $\frac{1}{p}$ et $\frac{1-p}{p^2}$. Pour la loi de Poisson : λ et λ .

Une utilisation importante des fonctions génératrices repose sur le fait suivant, qu'on admettra jusqu'au chapitre consacré :

PROPOSITION 10 — Fonction génératrice d'une somme

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** à valeurs dans \mathbb{N} . On a alors :

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y$$

Exercice 23. Déterminer la loi suivie par une somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$.

PS : Au fait...

De quel n vous parlez ?