Une trigonalisation et une série de fonctions

À rendre au plus tard le mardi 3 décembre 2024

1 Réduction : des sous-espaces stables

On s'intéresse dans cet exercice aux sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$ stables par l'application linéaire u canoniquement associée à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de u. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
2. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure ; calculer P^{-1}.
3. Montrer : $E = \mathrm{Ker}\,((u - \mathrm{Id}_E)^2) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$.
4. Faire un dessin où on peut voir $\mathrm{Ker}\,((u - \mathrm{Id}_E)^2)$, $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$.
5. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u et de dimension 1. En expliciter au moins un de dimension 2.
6. Soit F un sous-espace de E de dimension 2 stable par u. On note v la restriction de u à F (qui constitue donc un endomorphisme de F).
   (a) Rappeler pourquoi le polynôme caractéristique de v divise celui de u.
   (b) En considérant son degré, que peut valoir χ_v ?
   (c) En discutant sur χ_v, déterminer F.
7. Conclure.

2 Une série de fonctions classique

Dans cet exercice on définit, lorsque la série est convergente :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de S.
   (b) Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
   (c) Établir une relation simple entre $S(x)$ et $S(x+1)$, puis la valeur de $S(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et enfin un équivalent simple de $S(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. (a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) Prouver que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
3. En utilisant une comparaison somme-intégrale, donner un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
4. Donner l'allure du graphe de S.
5. [Optionnel] Montrer que $S(x) - \ln(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
   On pourra exprimer $S(x) - \ln(1 + x)$ sous forme d'une somme de série...