# Séries entières

## 1 Rayons de convergence

*On retiendra qu'il y a autre chose que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *pour calculer des rayons de convergence : très souvent, il est préférable de penser les choses en termes de « pour quels* $r$ *la suite* $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle bornée ? »*

**Exercice 1** – *Mines 2017 [5/10]*
On suppose que $(a_n)$ ne s'annule pas, et que $\dfrac{a_{n+3}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
Que dire si $\left|\dfrac{a_{n+3}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ?

**Exercice 2** – *CCP 2009 [2/10]*
On suppose que $|a_n| \sim |b_n|$. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence. En déduire le rayon de la série entière $\sum \dfrac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$.

**Exercice 3** – *Des rayons ; stage 1*
Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec $a_n$ défini des façons suivantes :

1. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ ;
2. $a_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{n^2}$ ;
3. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$ puis $a_n = \sqrt{n}^{-\sqrt{n}}$ ;
4. $a_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ puis $a_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ ;
5. $a_n = \left(\cosh \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ ;
6. $a_n = 999^{\sqrt{n}}$.

**Exercice 4** – *Des rayons ; stage 2*
Quelques derniers pour la route.

1. $(a_n)$ est telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 945$ ;
2. $(a_n)$ est périodique et à valeurs non nulles ;
3. $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n dt$ ;
4. $a_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{e}^t}{t} dt$ ;
5. $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} dt$ ;
6. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{945}$
7. $a_n = \binom{945n}{n}$ ;

8. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.

*Dans les situations un peu théoriques, on peut (pour se fixer les idées) remplacer l'hypothèse « $R(\sum a_n z^n) = K$ » par « $a_n = \frac{1}{K^n}$ » : ça marche assez bien pour intuiter le bon résultat.*

**Exercice 5** – *Pair-impair [5/10]*
On suppose que $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. Déterminer celui de $\sum a_n z^n$.

**Exercice 6** – *Harmonique alternée [8/10]*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot$ Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum S_n z^n$ et (plus difficile) $\sum R_n z^n$.

## 2 Calculs de somme

**Exercice 7** – *CCP 2017 [4/10]*
Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière

$$\sum \frac{3n}{n+2} x^n$$

**Exercice 8** – *Mines 2016 (deux fois) [4/10]*
Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$.

**Exercice 9** – *Centrale 2016 [5/10]*
Pour un réel $a = d_0, d_1 d_2 d_3 ... d_n ...$, on note $d_n$ la $n$-ème décimale de $a$.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum d_n x^n$ (on pourra discuter selon la valeur de $a$).
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{1}{10^n}$ ?

**Exercice 10** – $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ *[7/10]*

Calculer de deux façons différentes $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ :

— à l'aide d'une équation différentielle ;
— en faisant intervenir $\exp(x)$, $\exp(jx)$ et $\exp(j^2 x)$.

**Exercice 11** – *Mines 2009 [8/10]*
Calcul de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(n+1)}.$$

**Exercice 12** – *Des sommes [5/10]*
Calculer les sommes suivantes (en donnant les rayons de convergence) :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ ;

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ ;
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(na)}{n} x^n$ ;
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n$.

**Exercice 13** – *Harmonique [5/10]*
Calculer, pour des $x$ à préciser : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

**Exercice 14** – *DES,* Arctan*... [8/10]*
Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+3)}$.

# 3 Des développements en série entière

**Exercice 15** – *Centrale 2022 [5/10] – Hugo D.*
On définit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x - x^2$.

1. Quel est le plus grand intervalle $I$ contenant 0 tel que $g|_I$ est injective ?
2. On définit maintenant $J = g(I)$ et $f$ la bijection réciproque de la restriction de $f$ à $I$ (justifier !). Donner une forme explicite de $f(t)$, pour $t \in J$.
3. Montrer que $f$ est développable en série entière.
4. Calculer le développement en série entière de $f$.
5. *(Il y avait une suite...)*

**Exercice 16** – *Mines 2017 [5/10]*
Décomposer en série entière l'application

$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

**Exercice 17** – *Mines 2010 [5/10]*
Développer en série entière l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

**Exercice 18** – *Des développements en série entière*
Développer en série entière (en précisant le domaine de validité du développement) les « fonctions » suivantes :

1. $\ln(x^2 - 5x + 6)$.
2. $\mathrm{e}^x \sin x$ ;
3. $\ln(1 + x + x^2)$ (attention : $1 + x + x^2 = \frac{\cdots}{\cdots}$) ;
4. $\frac{1}{1 + x - 2x^3}$ ;
5. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (il y a peut-être un produit de Cauchy qui rôde...).
6. $\left(\frac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$ ;
7. $\frac{x}{1 - x - x^2}$ : par décomposition en éléments simples, puis en utilisant la relation $(1-x-x^2)f(x))x$.

**Exercice 19** – *$\mathcal{C}^\infty$ mais... [7/10]*

Montrer que l'application $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n+n^2 ix}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais qu'elle n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

## 4 Mais aussi...

**Exercice 20** – *Mines 2016 [8/10]*
On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}\cdot$

1. Déterminer le domaine de définition de $g$.
2. Déterminer la limite puis un équivalent simple de $g$ aux bords du domaine.

**Exercice 21** – *Valeur approchée en* 1 *[7/10]*
Montrer que l'équation $3ty' + (2-5t)y = t$ possède une unique solution $f$ développable en série entière au voisinage de 0. Calculer la valeur de $f(1)$ à $5.10^{-5}$ près.

**Exercice 22** – *CCP 2010 [7/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $d_n$ le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, 2, ..., n\}$. On pose de plus $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1. On note $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
3. Si $x \in ]-1, 1[$, calculer $f(x)\mathrm{e}^x$ et en déduire : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot$
4. Déterminer la limite de $\frac{d_n}{n!}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 23** – *[7/10]*
On pose, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}\cdot$

1. Donner le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x$.
2. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

## 5 Des indications (et même un peu mieux)

*Exercice 1* – Pour $r > 0$, je m'intéresse à la suite de terme général $u_n = a_n r^n$, et pour cela je m'intéresse (entre autre) à la suite extraite de terme général $v_n = u_{3n}$. Comme $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell r^3$, on aura $(v_n)$ bornée si $r^3 < 1/|\ell|$ et non bornée si $r^3 > 1/|\ell|$. Quelques lignes plus tard, on établira que le rayon de convergence vaut $1/\sqrt[3]{|\ell|}$.

*Exercice 2* – $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|b_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est. $R = 1$.

*Exercice 3* – D'Alembert : $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ; $\sim \mathrm{e}^{(n+1)^2}$ : 0 ; $a_n r^n = \mathrm{e}^{\cdots}$ : 1 et 1 et 1 et 1 ; même méthode : si $\alpha > 3$ alors $R = 0$, si $\alpha < 3$ alors $R = 1$ et si $\alpha = 3$ alors $R = \mathrm{e}^{-1/2}$ ; $a_n r^n = \mathrm{e}^{\cdots}$ : 1.

*Exercice 4* – Toujours $(a_n r^n)$ : $1$ ; $1$ ; $\dfrac{1}{2}$ ; $\sim \dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{2n}$ après intégration par parties, donc $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ ; $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $R = 1$ ; $\sim \dfrac{n^{946}}{946}$ par comparaison somme/intégrale, donc $R = 1$ ; d'Alembert : $\dfrac{944^{944}}{945^{945}}$ ; $a_n r^n$ : $R = 1$.

*Exercice 5* – $(|a_p|\, r^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? $R = \mathrm{Min}\left(\sqrt{R}, \sqrt{R'}\right)$.

*Exercice 6* – $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$ et $R_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$ (comparaison somme-intégrale après avoir regroupé les termes par deux ; classique... mais non instantanné) donc les deux rayons de convergence valent 1.

*Exercice 7* – Je commence par écrire $\dfrac{3n}{n+2} = 3 - 6\dfrac{1}{n+2}$, et quelques lignes plus loin j'obtiens pour $x \in [-1, 0[ \cup ]0, 1[$ : $S(x) = \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{6}{x^2}\left(\ln(1-x) + x\right)$

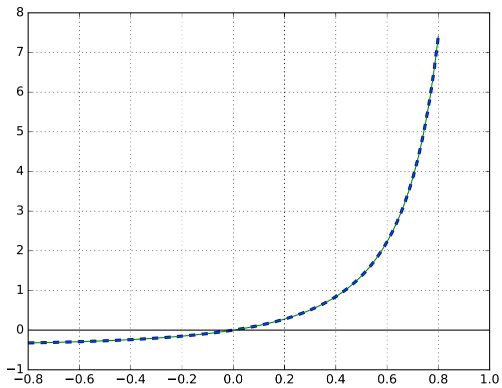


FIGURE 1 – $S_{50}(x)$ vs. $\frac{3}{1-x} + \frac{6}{x^2}\left(\ln(1-x) + x\right)$

*Exercice 8* – Il peut être intéressant de partir de $\dfrac{n}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(2n)!} - \dfrac{1}{(2n+1)!}\right)\cdots$

*Exercice 9* – Évidemment les choses ne se passent pas pareil selon que $a$ est décimal (et alors les $d_n$ sont nuls à partir d'un certain rang) ou non (et alors il y aura des $d_n \geqslant 1$ pour $n$ arbitrairement grand) ; le rayon de convergence est alors égal à 1 pour le second cas. Puisque $a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, il me semble que la quantité demandée est la somme d'un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes... Et la valeur attendue est donc $a^2$.

*Exercice 10* – On a $f''' = f$, avec les conditions initiales $f(0) = 1$, et $f'(0) = f''(0) = 0$. On peut également noter que (puisque $1 + j + j^2 = 0$) : $\exp(x) + \exp(jx) + \exp(j^2 x) = 3f(x)$. On trouve ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

*Exercice 11* – Déjà, $\dfrac{1}{(2n+1)(n+1)} = \dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1}$, et ensuite : $-x^2 + \ln(1-x^2) + 2x\mathrm{Argth}(x)$.
*Avec* Argth : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ *qui est une primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{1+x} + \dfrac{1/2}{1-x}$.

*Exercice 12* – On a $n^2 x^n = n(n-1)x^{n-2}x^2 + nx^{n-1}x$, puis $f_1(x) = \dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$, $R_1 = 1$. Décomposition en éléments simples : $f_2(x) = \dfrac{x(x+2) + 2(1-x^2)\ln(1-x)}{4x^3}$, $R_2 = 1$. $f_3(x)$ est une partie réelle, et vaut finalement $\mathrm{e}^{x\cosh a}\cosh(x\sinh a)$, avec $R_3 = +\infty$. On linéarise pour trouver $f_4(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2\cos 2\theta}\cos\left(x^2\sin 2\theta\right)$, avec $R_4 = +\infty$. Enfin, $n^5 = n(n-1)\ldots(n-4) + 10n(n-1)(n-2)(n-3) + \cdots$ et finalement $f_4(x) = \mathrm{e}^x\left(x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 15x^2 + x\right)$ avec $R_4 = +\infty$.

*Exercice 13* – Le rayon de convergence vaut bien entendu 1 ($a_n \sim \ln n$). Comme produit de Cauchy : $f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$

*Exercice 14* – Décomposition en éléments simples pour trouver $\dfrac{\pi}{8}$ (on reconnaît Arctan) et après interversion somme/intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}dt = \frac{\mathrm{Argsh}(1)}{2\sqrt{2}}\cdot$

*Exercice 15* – $g$ réalise une bijection de $I = ]-\infty, 1/2]$ sur $J = ]-\infty, 1/4]$ et pour $t \in J$ on a $f(t)^2 - f(t) + t = 0$ donc $f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4t}\right)$ (pourquoi cette racine et pas l'autre ?). On en déduit le caractère développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$. On peut ensuite calculer sans erreur (n'est-ce pas Hugo ?) à partir du DSE de $(1+u)^{1/2}$. On vérifie bien entendu les deux premiers termes non nuls...

*Exercice 16* – $f'(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{\alpha}{x-j} + \dfrac{\beta}{x-j^2}$ est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à 1...

*Exercice 17* – Je trouve $F' = 2xF + 1$, puis $F(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^n$.

*Exercice 18* – Tout d'abord, sur $]-2, 2[$ : $f_1'(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-x/3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x/2} \cdots$ Ensuite[1], $\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$ ; on décompose en éléments simples pour trouver sur $]-1, 1[$ :

$$f_2(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(1 + 2.2^{n/2}\left(2\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4)\right)\Big) x^n.$$

Il est pratique d'écrire $f_3(x) = (1-x)(1-x^2)^{-1/2}$, pour obtenir après produit de Cauchy entre des séries absolument convergentes (pour $|x| < 1$) :

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right).$$

*Exercice 19* – Toutes les séries dérivées convergent normalement sur $\mathbb{R}$.
Pour que $f$ soit développable en sarie entière on devrait avoir $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = O(1/R^n)$, ce qui n'est guère envisageable , car avec une comparaison somme/intégrale soigneuse (attention à la bosse) :

$$f^{(4p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{8p} \mathrm{e}^{-n} \geqslant \int_0^{+\infty} t^{8p}\mathrm{e}^{-t}dt - (8p)^{8p}\mathrm{e}^{-8p} \sim ...$$

d'après Stirling.

*Exercice 20* – $\mathcal{D}_g = [-1, 1[$. La convergence est uniforme sur $[-1, 0]$ (contrôle du reste d'une série alternée). Au voisinage de 1, on considère $(1-x)g(x)$, qui s'exprime comme une somme de série convergeant normalement, ce qui nous donne : $(1-x)g(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ (FAIL donc, pour l'équivalent). Une comparaison somme/intégrale m'a ensuite donné : $g(1-u) \sim \dfrac{1}{\sqrt{u}}\Gamma(1/2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{u}}\cdot$

*Exercice 21* – Analyse : si $x \mapsto \sum a_n x^n$ est une solution développable en série entière, alors $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{5}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $(3n+2)a_n = 5a_{n-1}$, puis $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-2}}{8.11...(3n+2)} x^n$. Synthèse : la

1. Désolé...

série précédente a un rayon de convergence infini (d'Alembert), et sa somme vérifie bien l'équation différentielle : c'est donc notre solution recherchée.
Pour majorer le reste [2], on peut tenter une majoration de $a_n$ par une série géométrique. Par exemple, $a_n \leqslant \frac{5}{8}\left(\frac{5}{11}\right)^{n-2}$ pour $n \geqslant 4$, ce qui donne alors $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leqslant \frac{55}{48}\left(\frac{5}{11}\right)^{N-1}$, et il suffit alors de prendre $N = 14$ pour avoir $|S_N - f(1)| \leqslant 5.10^{-5}$. Accessoirement, $S_{14} \simeq 0,40997$. Super...

*Exercice 22* – L'encadrement trivial $0 \leqslant d_n \leqslant n!$ assure que le rayon de convergence de la série définissant $f$ est supérieur ou égal à 1. Par produit de Cauchy : $f(x)\mathrm{e}^x = \cdots = \dfrac{1}{1-x}$ d'après ce qui précède. Ensuite, on fait le calcul via à nouveau un produit de Cauchy. Enfin : $\dfrac{d_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot$

*Exercice 23* – Puisque $a_n \sim \dfrac{3}{n^3}$, le rayon de convergence vaut 1. Ensuite, $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2}{2n+1}\cdot$ On trouve alors $S(x) = 3 - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x) - \dfrac{4}{\sqrt{x}}\mathrm{Argth}\sqrt{x}$ (pour $x > 0$), puis $S(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 18 - 24\ln 2$. Convergence normale sur $[0,1]$, donc OK pour la continuité. Ça passe aussi via $\ln n + \gamma + o(1)$...

2. Ça fleure bon les années 80 !