Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet porte sur les matrices de Toeplitz. Il est constitué de trois grandes parties :

- une première partie qui permet de se familiariser avec cette classe de matrices, notamment par l'étude du cas des matrices de Toeplitz de taille 2, ou encore par quelques propriétés des matrices tri-diagonales qui sont un cas particulier des matrices de Toeplitz ;
- une deuxième partie dont l'objectif est l'étude des matrices circulantes qui sont un autre cas particulier des matrices de Toeplitz. On étudie notamment la structure de cet ensemble et la diagonalisabilité de ces matrices ;
- une troisième et dernière partie qui propose l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

Une matrice de Toeplitz de taille n a la particularité d'être entièrement déterminée par $2n - 1$ coefficients (et non pas n^2 comme c'est le cas pour une matrice quelconque). Ces matrices ont plusieurs utilisations intéressantes, notamment, dans la résolution de systèmes linéaires.

Une bonne maîtrise des chapitres d'algèbre linéaire (espaces vectoriels, endomorphismes en dimension finie, réduction des matrices et des endomorphismes...) est indispensable pour traiter correctement ce sujet, mais quelques autres chapitres d'algèbre générale (nombres complexes, trigonométrie, polynômes) entrent également en jeu.

Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats et certaines questions ont été très bien traitées. Une grande majorité des candidats connaît la définition et les propriétés élémentaires d'une matrice diagonalisable ou d'une suite récurrente linéaire, objets qui occupaient une place centrale dans cette première partie. En revanche, les calculs ont trop souvent été fait dans le corps des réels alors que les matrices et scalaires étaient des nombres complexes !

La deuxième partie, bien plus courte, a aussi été très largement étudiée. Les polynômes de matrices y occupent une place importante et cette notion semble bien comprise.

La troisième partie, qui représente pourtant près de la moitié du problème, a été nettement moins abordée, et peu de questions ont été correctement traitées. Cela s'explique sans doute essentiellement par une plus grande abstraction ou technicité des questions qui y figuraient, mais aussi par sa position en seconde moitié du problème.

Le sujet est long, mais cela n'a pas empêché certains candidats d'en traiter presque les trois quarts.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats.

L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (SRS pour scindé à racines simples...) le sont nettement moins.

Pour démontrer qu'une famille est une base, il faut démontrer qu'elle est libre et génératrice. Dans la question 1, trop de candidats ne l'ont pas fait correctement.

Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable. C'est par contre toujours le cas pour une matrice symétrique à coefficients réels.

Il n'y a pas équivalence pour une matrice entre « être diagonalisable » et « avoir un polynôme caractéristique scindé et à racines simples ».

Il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$! Ainsi, lors de la résolution d'une équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$, cela n'a aucun sens de traiter les cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

Dans un raisonnement par récurrence, si l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ n'est pas utilisée lors de l'hérédité, c'est que la récurrence n'a sans doute pas lieu d'être !

Lorsqu'un raisonnement est découpé en plusieurs cas, il faut vérifier que tous ces cas recouvrent bien l'ensemble de toutes les possibilités. C'était notamment important dans la question 4 pour être certain de bien tout envisager ou pour ne pas traiter plusieurs fois le même cas.

Les racines complexes d'une équation de degré 2 à coefficients complexes ne sont pas nécessairement conjuguées.

Si P est un polynôme annulateur d'une matrice A , seule l'inclusion $\text{sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$ est toujours valable, mais l'inclusion réciproque ne l'est pas forcément.

Conclusion

Le sujet est long mais sa progressivité a permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences en algèbre. Quelques lacunes sur des notions de base (nombres complexes notamment) ont malheureusement aussi été repérées.

Les correcteurs encouragent vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées. De même, quelques exemples simples vus tout au long de l'année donneraient aux candidats des idées élémentaires permettant de comprendre de nombreuses questions et d'en mesurer la difficulté.