Khôlles : quinzaine numéro 5

Du 2 au 13 décembre 2024

1 Première semaine : réduction ; suites et séries de fonctions

- Convergence simple et uniforme.
- Convergence normale, pour les séries. Les théorèmes de régularité sont énoncés et prouvés pour les *suites* de fonctions, et ré-énoncés et essentiellement utilisés dans le cadre des *séries* : continuité, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^p$, intégration, et double limite.
- Pour que $\sum f_n$ converge uniformément, il est nécessaire d'avoir $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Il a été chuchoté qu'en cas de localisation, la régularité passait des $[\alpha,\beta]$ à $]0,+\infty[$ (par exemple), mais qu'il n'en allait pas tout à fait de même pour les convergences uniformes/normales.
- Début des séries entières : lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Convergence absolue de $\sum a_n z^n$ pour $|z| < R$ et divergence grossière pour $|z| > R$.
  Colleurs : la plupart des rayons de convergence seront déterminés en regardant si $(a_n r^n)$ est bornée... et plus précisément pour quels r. D'Alembert n'est pas interdit, mais que après avoir regardé $(a_n r^n)$.

2 Deuxième semaine

- Encore des suites et séries de fonctions.
- Séries entières : lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence.
- Convergence absolue à l'intérieur du disque, divergence grossière à l'extérieur. L'étude sur le bord n'est pas un objectif du programme.
- Les séries primitivées et dérivées ont le même rayon que la série initiale.
- La fonction somme est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert qu'on imagine.
- Développements en séries entières (somme, produit, fonctions de base, primitivisation/dérivation).
- Applications standards : calculs de somme, solutions d'équations différentielles, fonctions génératrices pour dénombrer (et déjà un peu pour les probas !).

3 Questions de cours

- (S1) Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.
- (S1) La convergence normale implique la convergence uniforme.
- (S1) Théorème de continuité pour une limite uniforme.
- (S1+S2) Si $(a_n z^n)$ est bornée et $|z_0| < |z|$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- (S1+S2) Rayon de convergence de la série entière primitivée/dérivée.
- (S1+S2) Unicité du développement en série entière, en cas d'existence.
- (S1+S2) Expression intégrale des coefficients de la série de Taylor, pour une série complexe de rayon de convergence non nul.

4 Coming next

Prochaine quinzaine [1] : intégration.

1. Attention : pas de colle la dernière semaine avant noël