



De la réduction... et des séries de fonctions

Samedi 7 décembre 2024 – calculatrices autorisées

1 Un exercice de colle, au départ !

On s'intéresse dans cet exercice à la résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à l'équation

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans tout l'exercice on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Réductions de A dans $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de A .
Vous allez perdre une heure si vous vous êtes trompés, donc refaites le calcul au brouillon ! Inutile de vérifier votre calcul, il faut le refaire de façon indépendante !
- (b) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Expliciter $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Les trois questions suivantes sont indépendantes de la précédente !
- (c) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Trigonalisable ?
- (d) Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$.
- (e) On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A . Montrer qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{F}) = B$.

2. Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- (a) Donner avec une brève justification les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = i$.
- (b) On suppose dans cette question que $M^3 = A$ avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note respectivement v et w les endomorphismes de $E = \mathbb{C}^3$ canoniquement associés à M et A (on note $\mathcal{E}$ la base canonique de E).
Montrer que les sous-espaces propres de w sont stables par v . En déduire la matrice de v dans une « bonne » base à préciser, puis donner la forme nécessaire de $M = \text{Mat}(v, \mathcal{E})$.
- (c) Terminer la résolution de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3. Quelques considérations géométriques

- (a) Après avoir fait un dessin, donner la matrice de la rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Après avoir plissé les yeux en regardant $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, exploiter la question précédente pour trouver une puis trois matrices réelles distinctes dont le cube vaut R .
- (c) Montrer que R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, puis que l'équation $M^3 = R$ possède exactement 9 solutions distinctes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- (d) Parmi ces 9 solutions, combien possèdent une trace réelle ?
- (e) Combien de solutions réelles possède l'équation $M^3 = R$?

4. *Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

On note maintenant $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}$ sa base canonique, et on rappelle qu'on a montré à la première question que la matrice de u (endomorphisme de E canoniquement associé à A) dans une bonne base, notée $\mathcal{F}$, vaut B .

- (a) Expliciter trois matrices réelles dont le cube vaut B , puis trois solutions de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on ne demande pas d'expliciter complètement ces trois dernières solutions).
 - (b) On suppose ici que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 = A$ et on note z l'endomorphisme de E canoniquement associé à M . Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$ sont stables par z , et en déduire l'allure de $\text{Mat}(z, \mathcal{F})$.
 - (c) Terminer la résolution de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Le vrai énoncé concernait l'équation $M^n = A$, avec n un entier ≥ 2 (pas forcément $n = 3$).
- (a) Résoudre succinctement cet exercice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (en utilisant ce qui a été fait bien entendu!). Plus précisément, on donnera le nombre de solutions.
 - (b) De même donner en justifiant succinctement le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $M^n = A$.

2 Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$

2.1 Convergence de quelques séries

1. Montrer que $\theta \mapsto \sum \frac{\cos(n\theta)}{n^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On se propose de montrer la convergence de $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$.
 - (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ la somme $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. En déduire successivement que $|S_n(\theta)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$, puis $|S_n(\theta)| \leq \frac{2}{1 - \cos \theta}$ et enfin : si on fixe $\alpha \in]0, \pi[$ alors

$$\|S_n\|_{\infty, [\alpha, 2\pi-\alpha]} \leq \frac{2}{1 - \cos \alpha}.$$

- (b) On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 2\pi[$: $T_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\theta}}{k}$.

Montrer :

$$T_n(\theta) = \sum_{k=1}^n S_k(\theta) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_n(\theta)}{n+1} - S_0(\theta)$$

- (c) En déduire que la suite $(T_n(\theta))$ converge et conclure.
3. Montrer que (T_n) converge uniformément sur tout segment $[\alpha, 2\pi - \alpha] \subset]0, 2\pi[$.
On pourra commencer par montrer que le reste vaut $R_n(\theta) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(\theta) \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) - \frac{S_n(\theta)}{n+1}$
4. Montrer que $S : \theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ est continue sur $]0, 2\pi[$

2.2 Une série entière

On fixe $\theta_0 \in]0, 2\pi[$ et on s'intéresse à la série entière $\sum \frac{\cos(n\theta_0)}{n} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série vaut au moins 1.
2. Justifier que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta_0)}{n} x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis montrer : $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta_0)$.
4. En s'inspirant de la technique utilisée dans la première partie, montrer que la série de fonctions $x \mapsto \sum \frac{e^{ni\theta_0}}{n} x^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.
5. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta_0)}{n}$.

2.3 Un développement en série entière

Cette partie est complètement indépendante de la précédente : vous n'y utiliserez donc pas les résultats établis ou admis précédemment...

Dans cette partie on fixe $a \in]0, \pi[$ et on définit l'application $g : x \mapsto \ln(\sqrt{1 - 2x \cos a + x^2})$.

1. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x - e^{ia}} + \frac{1}{2} \frac{1}{x - e^{-ia}}$$
3. Montrer que g' est développable en série entière ; expliciter ce développement. Même chose pour g .
4. En s'autorisant à faire tendre sauvagement x vers 1 dans la relation précédente, qu'obtient-on ?