# De la réduction... et des séries de fonctions

*Samedi 7 décembre 2024 – calculatrices autorisées*

## 1 Un exercice de colle, au départ !

On s'intéresse dans cet exercice à la résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à l'équation

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans tout l'exercice on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Réductions de $A$ dans $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$.*
   - (a) Calculer le polynôme caractéristique de $A$.
     *Vous allez perdre une heure si vous vous êtes trompés, donc refaites le calcul au brouillon ! Inutile de vérifier votre calcul, il faut le refaire de façon indépendante !*
   - (b) Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
     *Les trois questions suivantes sont indépendantes de la précédente !*
   - (c) La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? Trigonalisable ?
   - (d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
   - (e) On note $u$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = B$.
2. *Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.*
   - (a) Donner avec une brève justification les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = i$.
   - (b) On suppose dans cette question que $M^3 = A$ avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note respectivement $v$ et $w$ les endomorphismes de $E = \mathbb{C}^3$ canoniquement associés à $M$ et $A$ (on note $\mathcal{E}$ la base canonique de $E$).
     Montrer que les sous-espaces propres de $w$ sont stables par $v$. En déduire la matrice de $v$ dans une « bonne » base à préciser, puis donner la forme nécessaire de $M = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$.
   - (c) Terminer la résolution de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3. *Quelques considérations géométriques*
   - (a) Après avoir fait un dessin, donner la matrice de la rotation d'angle $\theta$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   - (b) Après avoir plissé les yeux en regardant $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, exploiter la question précédente pour trouver une puis trois matrices réelles distinctes dont le cube vaut $R$.
   - (c) Montrer que $R$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, puis que l'équation $M^3 = R$ possède exactement 9 solutions distinctes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   - (d) Parmi ces 9 solutions, combien possèdent une trace réelle ?
   - (e) Combien de solutions réelles possède l'équation $M^3 = R$ ?

4. *Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
   On note maintenant $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}$ sa base canonique, et et on rappelle qu'on a montré à la première question que la matrice de $u$ (endomorphisme de $E$ canoniquement associé à $A$) dans une bonne base, notée $\mathcal{F}$, vaut $B$.
   (a) Expliciter trois matrices réelles dont le cube vaut $B$, puis trois solutions de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on ne demande pas d'expliciter complètement ces trois dernières solutions).
   (b) On suppose ici que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 = A$ et on note $z$ l'endomorphisme de $E$ canoniquement associé à $M$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{Id}_E)$ sont stables par $z$, et en déduire l'allure de $\operatorname{Mat}(z, \mathcal{F})$.
   (c) Terminer la résolution de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Le vrai énoncé concernait l'équation $M^n = A$, avec $n$ un entier $\geqslant 2$ (pas forcément $n = 3$).
   (a) Résoudre succinctement cet exercice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (en utilisant ce qui a été fait bien entendu !). Plus précisément, on donnera le nombre de solutions.
   (b) De même donner en justifiant succinctement le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $M^n = A$.

## 2 Une série de fonctions

Pour tout entier naturel $n$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ l'application $f_n$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

En cas de convergence, on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n$ le reste de cette série.

1. Montrer que le domaine de convergence simple de $\sum f_n$ vaut $]0, +\infty[$.
   *Pour $x > 0$, on note $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.*
2. (a) $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$ ? Et sur $[\alpha, +\infty[$ lorsque $\alpha > 0$ ?
   (b) Montrer que pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\|R_n\|_{\infty, [\alpha, +\infty[} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+n\alpha}}$.
   (c) Montrer que $\varphi$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   (d) *(Sensiblement plus difficile[1])* Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   *On pourra être amené à étudier les variations de $g : t \mapsto \dfrac{t}{(1+t)^{3/2}}$.*
3. (a) Montrer que $\varphi$ possède une limite finie $\ell$ (qu'on déterminera) en $+\infty$.
   (b) Justifier l'existence de $a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (sans chercher à calculer ce réel).
   (c) Montrer que pour tout $u \geqslant 0$, $\left|(1+u)^{-1/2} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2u^{3/2}}$.
   (d) Montrer que l'on a au voisinage de $+\infty$ :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

1. Si on ne veut pas gruger.

## 3 Une estimation de $\pi$

1. Montrer que la fonction Arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$, et plus précisément :

$$\forall x \in ]-1,1[ \qquad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

2. Montrer que la relation précédente s'étend à $[-1,1]$.
*On pourra quitter le monde douillet des séries entières pour revenir à celui périlleux des séries de fonctions générales...*
3. Exprimer (en justifiant), pour $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(2\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simple de $\tan(\pi/8)$.
4. Montrer :

$$\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$$

5. Estimer l'erreur faite lorsqu'on approxime $\pi$ par $8 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$. Plus précisément, déterminer une valeur de $N$ pour lequel on est certain d'avoir

$$\left| \pi - 8 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right| \leqslant \frac{1}{10^{10}}.$$

*Bien entendu les mots « il faut » et « il suffit » seront scrutés à la loupe...*