1 Un exercice de colle, au départ !

1. *Réductions de A dans $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$.*

   (a) En développant selon la première colonne ça doit aller bien et sans erreur :
   $$\boxed{\chi_A = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)}$$

   (b) χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$ donc :
   $$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$
   Plus précisément son spectre vaut $\{1, i, -i\}$, et on cherche une matrice P de passage entre la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathcal{F}$ (je pense aux notations à venir) de diagonalisation. En regardant la première colonne de A on note que $g_1 = e_1$ est un sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Pour i on s'intéresse au noyau de $A - iI_3 = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$
   En regardant les colonnes (C_i) on note que $C_2 + iC_3 = (1+i)e_1 = \dfrac{1+i}{1-i}C_1$ donc
   $$g_2 = (1+i)e_1 - (1-i)e_2 - i(1-i)e_3 = (1+i)e_1 - (1-i)e_2 - (1+i)e_3 \in \mathrm{Ker}\,(u - i\mathrm{Id})$$
   De même :
   $$g_3 = (1+i)e_1 - (1+i)e_2 - (1-i)e_3 \in \mathrm{Ker}\,(u - i\mathrm{Id})$$
   Il faut comprendre le « de même » comme : j'ai refait le calcul, ou bien j'ai noté que si $AX = \lambda X$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$
   $$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & -1-i & -1+i \end{pmatrix} \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}}$$
   L'inversibilité de P vient du fait que $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ est bien une base (trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres différentes)

   (c) Puisque χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (condition *nécessaire* pour être trigonalisable, et a fortiori diagonalisable) :
   $$\boxed{A \text{ n'est ni diagonalisable ni même trigonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

   (d) On a déjà : $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1)$ (inclusion et rang). Ensuite :
   $$\mathrm{Mat}(u^2 + \mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   donc est de rang 1 et a dans son noyau (de dimension $3-1=2$) e_2 et $e_1 - e_3$ donc $\mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1 - e_3)$. Il reste à noter que ces deux sous-espaces (dont la somme des dimensions vaut 3) sont d'intersection réduite à $\{0\}$: en montrant que les trois vecteurs auxquels on pense constituent une base, ou bien en notant que quand $u(x) = x$, alors $(u^2 + \mathrm{Id})(x) = 2x$...
   $$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)}$$

   (e) On cherche une base (f_1, f_2, f_3) de E telle que $u(f_1) = f_1$, $u(f_2) = f_3$ et $u(f_3) = -f_2$. On va évidemment prendre $f_1 = e_1$; puis on note que les conditions requises imposent : $u^2(f_2) = -f_2$, c'est-à-dire $f_2 \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id})$. On peut peut-être tenter de prendre $f_2 = e_2$? On a alors $u(f_2) = e_1 - e_3$... et on va prendre $f_3 = e_1 - e_3 = u(f_2)$. On a alors $u(f_3) = -e_2 = -f_2$ après calcul. Il reste à noter que (f_1, f_2, f_3) est une base de E d'après la question précédente.
   $$\boxed{\text{Dans la base } \mathcal{F} = (e_1, e_2, e_1 - e_3) \text{ la matrice de } u \text{ vaut } B.}$$

2. *Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.*

(a) Il s'agit de trouver UNE solution, puis de la multiplier par les racines cubiques de l'unité. On peut au choix noter que $(-i)^3 = i$, ou bien que $i = \mathrm{e}^{i\pi/2} = (\mathrm{e}^{i\pi/6})^3$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } z^3 = i \text{ sont } -i,\ -ij = \mathrm{e}^{i(\pi+\pi/2+2\pi/3)} = \mathrm{e}^{i\pi/6} \text{ et } -ij^2 = \mathrm{e}^{i(\pi+\pi/2+4\pi/3)} = \mathrm{e}^{5i\pi/6}}$$

(b) Puisque $\mathrm{Mat}(v^3, \mathcal{E}) = M^3 = A = \mathrm{Mat}(w, \mathcal{E})$ on a $v^3 = w$ donc $v \circ w = v \circ v^3 = v^4 = v^3 \circ v = w \circ v$ donc (c'est dans le cours !)

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } w \text{ sont stables par } v}$$

On a vu que les sous-espaces propres de w sont $\mathrm{Vect}(g_1)$, $\mathrm{Vect}(g_2)$ et $\mathrm{Vect}(g_3)$ avec les vecteurs g_i vus plus haut. La stabilité de $\mathrm{Ker}\,(w - \mathrm{Id})$ par v nous dit alors que $v(g_1) \in \mathrm{Ker}\,(w - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(g_1)$, d'où l'existence de α tel que $v(g_1) = \alpha g_1$. Même chose pour g_2 et g_3. La matrice de v dans $\mathcal{G}$ est donc diagonale ; et puisque son cube vaut $\mathrm{Mat}(v^3, \mathcal{G}) = \mathrm{Mat}(w, \mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, les scalaires sur la diagonale ont pour cubes respectifs 1. Il reste à revenir à $M = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$ grâce à la formule de changement de base.

$$\boxed{M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } \alpha \in \{1, j, j^2\},\ \beta \in \{-i, \mathrm{e}^{i\pi/6}, \mathrm{e}^{5i\pi/6}\} \text{ et } \gamma \in \{i, \mathrm{e}^{-i\pi/6}, \mathrm{e}^{-5i\pi/6}\}}$$

(c) Les questions précédentes constituaient l'analyse : si $M^3 = A$ alors M est de la forme précédente. Mais réciproquement si M est de la forme précédente, alors $M^3 = P\,\mathrm{Diag}(1, i, -i)P^{-1} = A$, donc :

$$\boxed{\text{Dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ l'équation } M^3 = A \text{ possède exactement les } 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ solutions décrites plus haut.}}$$

3. *Quelques considérations géométriques*

(a) Je vous laisse dessiner le cercle trigonométrique, ainsi que $e_1 = (1, 0)$ qu'on a fait tourner de θ pour trouver $r(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. Avec un peu de soin on dessine $r(e_2)$ et on voit que c'est $-\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$

$$\boxed{\text{La matrice demandée est } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

(b) R est la matrice (dans la base canonique, mais dans d'autres aussi... bref) de la rotation d'angle $\pi/2$... qu'on obtient comme composée de trois rotations d'angle $\pi/6$... mais aussi d'angle $\pi/6 \pm 2\pi/3$!

$$\boxed{\text{Pour } \theta \in \{\pi/6, 5\pi/6, -\pi/2\}, \text{ on a } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^3 = R}$$

(c) On peut noter (toujours avec des considérations géométriques !) que $R^2 = -I$ donc R possède comme polynôme annulateur le polynôme scindé à racines simples $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$... ou bien constater que $\chi_R = X^2 + 1$. Bref :

$$\boxed{\text{Dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ R \text{ est semblable à } \mathrm{Diag}(i, -i).}$$

Le travail fait dans la première partie nous fournit à quelques virgules près 3×3 solutions distinctes de $M^3 = R$, semblables à $\mathrm{Diag}(\alpha, \beta)$ où $\alpha \in \{-i, \mathrm{e}^{i\pi/6}, \mathrm{e}^{5i\pi/6}\}$ et $\beta \in \{i, \mathrm{e}^{-i\pi/6}, \mathrm{e}^{-5i\pi/6}\}$.

$$\boxed{M^3 = R \text{ possède exactement 9 racines distinctes dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

(d) Quand α et β sont sur le cercle trigonométrique, pour avoir $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ il est nécessaire et suffisant d'avoir $\beta = \overline{\alpha}$, ce qui nous laisse seulement 3 possibilités (par exemple la matrice semblable à $\mathrm{Diag}(-i, \mathrm{e}^{-i\pi/6})$ a sa trace qui n'est pas réelle.

$$\boxed{\text{Des 9 solutions précédentes, seulement 3 ont une trace réelle.}}$$

(e) Pour qu'une matrice complexe soit réelle il est nécessaire que sa trace soit réelle (mais à peine suffisant !). L'équation $M^3 = R$ possède donc **au plus** 3 solutions réelles. Mais on peut effectivement en construire 3 d'après la question 3.b ; ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } M^3 = R \text{ possède exactement trois solutions dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

4. *Résolution dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Si on a bien compris ce qu'on a fait dans la partie précédente...

   $$\boxed{\text{Pour } \theta \in \{\pi/6, 5\pi/6, -\pi/2\}, \text{ on a } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^3 = B}$$

   Et bien entendu

   $$\boxed{\text{Quand } N \text{ décrit les trois matrices précédentes, } PNP^{-1} \text{ décrit trois solutions réelles de } M^3 = A}$$

   (b) Successivement : $z^3 = u$, puis $z \circ u = u \circ z$, donc le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ est stable par z, mais on montre qu'il en va de même pour $\operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{Id})_E$. Prenons donc $x \in \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{Id}_E)$. On veut montrer que $z(x)$ appartient aussi à ce noyau. Calculons donc :

   $$(u^2 + \operatorname{Id}_E)(z(x)) = \big((u^2 + \operatorname{Id}_E) \circ z\big)(x) = \big(z \circ (u^2 + \operatorname{Id}_E)\big)(x) = z\big((u^2 + \operatorname{Id}_E)(x)\big) = 0$$

   ce qui est le résultat souhaité.

   $$\boxed{\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \text{ et } \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{Id}_E) \text{ sont stables par } z}$$

   Si on a bien compris le théorème 1-2-3-4-5, on en déduit que $\operatorname{Mat}(z, \mathcal{F})$ est diagonale par bloc :

   $$\boxed{\operatorname{Mat}(z, \mathcal{F}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}}$$

   (c) Analyse : si $M^3 = A$ avec $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{Mat}(z, w)$ est de la forme (par blocs) $\operatorname{Diag}(a, Q)$ avec $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et de plus $a^3 = 1$ et $Q^3 = R$. On a donc $a = 1$ (on est dans $\mathbb{R}$!) et Q est l'une des trois matrices vues à la fin de la partie 3, puis $M = P\operatorname{Diag}(a, Q)P^{-1}$.
   Synthèse : réciproquement si $M = P\operatorname{Diag}(1, Q)P^{-1}$ avec Q l'une des trois matrices vues à la fin de la partie 3, alors $M^3 = P\operatorname{Diag}(1, Q)P^{-1} = P\operatorname{Diag}(1, R)P^{-1} = A$

   $$\boxed{\text{L'équation } M^3 = A \text{ possède exactement 3 solutions réelles dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

5. (a) Ce qui change : les équations $z^n = 1$, $z^n = j$ et $z^n = j^2$ possèdent n solutions complexes. Tout le reste est identique.

   $$\boxed{\text{L'équation } M^n = A \text{ possède } n^3 \text{ solutions dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$$

   (b) Ce qui change : l'équation $a^n = 1$ possède une solution si n est impair, mais 2 si n est pair (1 et -1). Pour les matrices de rotations, on en trouve n (les rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ où k décrit $[\![0, n-1]\!]$). Mais parmi les n^2 solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de $M^2 = R$, seules n ont une trace réelle : ce sont donc ces n matrices de rotations.

   $$\boxed{\text{L'équation } M^n = A \text{ possède } 2n \text{ solutions dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ si } n \text{ est pair ; } n \text{ sinon.}}$$

2 Une série de fonctions

1. Pour $x = 0$: $(f_n(x)) = ((-1)^n)$ ne converge pas vers 0 : il y a donc divergence grossière de $\sum f_n(0)$. Pour $x_0 > 0$ fixé, $\sum f_n(x_0)$ est alternée, avec $(|f_n(x_0)|)$ qui converge en décroissant vers 0. Le théorème sur les séries alternées nous assure que $\sum f_n(x_0)$ converge.

   $$\boxed{\text{Le domaine de convergence simple de } \textstyle\sum f_n \text{ est }]0, +\infty[.}$$

2. (a) La fonction $|f_n| : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et tend vers 1 en 0^+, donc $\|f_n\|_\infty = 1$ (et cette borne inférieure n'est pas atteinte), de série grossièrement divergente. On a de même (et cette fois c'est un maximum) $\|f_n\|_{\infty, [\alpha, +\infty[} = \dfrac{1}{\sqrt{1+n\alpha}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{n}}$:

   $$\boxed{\textstyle\sum f_n \text{ ne converge normalement ni sur }]0, +\infty[\text{ ni sur } [\alpha, +\infty[.}$$

(b) Fixons $\alpha > 0$ puis $x \in [\alpha, +\infty[$: dans le théorème concernant les séries alternées, on a également en conclusion le contrôle :

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+n\alpha}}$$

puisque $n+1 \geqslant n$ et $x \geqslant \alpha$. Ceci étant vrai pour tout $x \geqslant \alpha$:

$$\boxed{\|R_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+n\alpha}}.}$$

(c) Vérifions les hypothèses du théorème de continuité des sommes de séries de fonctions :
— chaque f_n est continue sur $]0, +\infty[$;
— pour tout $\alpha > 0$, $\sum f_n$ converge uniformément (à défaut de normalement) sur $[\alpha, +\infty[$.

$$\boxed{\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est donc continue sur }]0, +\infty[.}$$

(d) Vérifions les hypothèses du théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des sommes de séries de fonctions :
— chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, avec $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2(1+nx)^{3/2}}$;
— $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$;
— fixons $\alpha > 0$, et montrons la convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur $[\alpha, +\infty[$. Pour cela, on note qu'on a à nouveau affaire à une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant donc pour $x \geqslant \alpha$, le reste $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$ vérifie :

$$|T_n(x)| \leqslant \left|f_{n+1}'(x)\right| = \frac{n+1}{2(1+(n+1)x)^{3/2}} \leqslant \frac{n+1}{2(1+(n+1)\alpha)^{3/2}}$$

puis $\|T_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} \leqslant \dfrac{n+1}{2(1+(n+1)\alpha)^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$.

$$\boxed{\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

Il y a eu une arnaque : la suite $(|f_n'(x)|)$ est-elle vraiment décroissante ? Étudions pour cela $g : t \mapsto \dfrac{t}{(1+t)^{3/2}}$, de sorte que $|f_n'(x)| = \dfrac{1}{2x}g(nx)$. Sauf erreur de ma part, $g'(t) = \dfrac{2-t}{2(1+t)^{5/2}}$ est < 0 pour $t > 2$, donc $(|f_n'(x)|) = \left(\dfrac{1}{2x}g(nx)\right)$ est certes décroissante, mais seulement au delà du rang $\lceil \dfrac{2}{x} \rceil$; or on voudrait un rang qui ne dépende pas de x ! Heureusement on va pouvoir uniformiser : si $x \geqslant \alpha$ et $n \geqslant n_0 = \lceil \dfrac{2}{\alpha} \rceil$ alors $n \geqslant \dfrac{2}{x}$ donc $(|f_n'(x)|)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante, et on peut alors continuer par contrôle de reste par le premier terme comme plus haut, prouvant la convergence uniforme de T_n vers 0 sur $[\alpha, +\infty[$.

$$\boxed{\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{, même sans arnaquer.}}$$

Allez savoir pourquoi : je suis modérément confiant sur le taux de réussite sur cette question !

3. (a) On nous parle de la limite en $+\infty$ d'une somme de série, nous guidant vers le théorème de la double limite. C'est parti !
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
— La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Le théorème de la double limite dit que $\sum \alpha_n$ converge (super !), et que la somme $\varphi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ possède une limite en $+\infty$ qui est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$; bref : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right)$.

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

(b) La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée, et la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant, donc :

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ est bien convergente.}}$$

(c) L'application $h : u \geqslant 0 \mapsto (1+u)^{-1/2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $h'(u) = -\frac{1}{2}(1+u)^{-3/2}$ donc $|h'(u)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $u \geqslant 0$, donc l'inégalité des accroissements finis entre 0 et u nous dit que $|h(u) - h(0)| \leqslant \frac{1}{2}|u-0|$, soit encore :

$$\boxed{\left|(1+u)^{-1/2} - 1\right| \leqslant \frac{u}{2}\cdot}$$

(d) Notons déjà que pour $x > 0$ on a $\ell = f_0(x)$, donc

$$\varphi(x) - \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{-1/2}$$

puis :

$$\sqrt{x}\,(\varphi(x) - \ell) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{-1/2} - 1\right)$$

Il reste à majorer la valeur absolue de la dernière somme. Ce qui se fait sans mal avec ce qui précède (et l'inégalité triangulaire) : puisque chaque terme de cette série a sa valeur absolue majorée par $\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2nx}$ on obtient :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{-1/2} - 1\right)\right| \leqslant \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\cdot$$

Finalement, cette somme est un $O(1/x)$, et en reconstituant le puzzle, on trouve bien :

$$\boxed{\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)}$$

3 Une estimation de π

1. Le caractère « développable en série entière » passe à la dérivation et à la primitivisation. On va donc plutôt s'intéresser à la dérivée de la fonction arctangente. Or on a :

$$\forall t \in]-1,1[\qquad \mathrm{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^n$$

(on a seulement utilisé le fait que $x = \left|-t^2\right| < 1$ et dans ce cas on sait calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$). On obtient finalement un développement en série entière pour Arctan', que le cours nous autorise à primitiver sur $]-1,1[$:

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}$$

(Attention, quand $f' = g'$ sur un intervalle, on sait que f et g sont égales à une constante près ; on a donc ajusté la constante en 0).

2. Par imparité des deux membres, il suffit d'étendre en 1. On définit alors $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. À x fixé, la série $\sum f_n(x)$ est alternée, de terme général dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant, donc $\sum f_n(x)$ est convergente, mais de plus on a la contrôle du reste :

$$\forall x \in [0,1] \qquad |R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1}\cdot$$

Ainsi, on a la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,1]$ avec de plus $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la convergence est uniforme sur $[0,1]$. Ainsi la fonction somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[0,1]$, coïncide avec Arctan sur $[0,1[$, et donc par continuité elle coïncide également en 1. *Pas convaincus ? écrivez* $S(1-1/n) = \text{Arctan}(1-1/n)$ *et regardez individuellement chaque membre quand* n *tend vers* $+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1],\ \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}}$$

3. On écrit par exemple pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

et il reste à « diviser en haut et en bas par $\cos^2\theta \neq 0$ »

$$\boxed{\text{Pour } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ on a } \tan(2\theta) = \frac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}.}$$

En particulier pour $\theta = \dfrac{\pi}{8}$ on obtient $\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\pi/8}{1-\tan^2\pi/8}$, donc $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$ vérifie $1 - x^2 = 2x$ puis $x^2 + 2x - 1 = 0$ puis $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Mais $\tan\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}}$$

4. Alors...

$$\boxed{\text{Yaka s'intéresser à Arctan}\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)}$$

D'une part... d'autre part...

5. Toujours grâce au théorème sur les séries alternées (dont le terme général etc) on a le contrôle :

$$\delta_n = \left|\pi - 8\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right| \leqslant 8\frac{(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3} \leqslant (\sqrt{2}-1)^{2N+3}$$

dès que $N \geqslant 3$ (on simplifie les inégalités en les appauvrissant légèrement, mais on garde l'exponentielle qui va brutaliser la convergence). Si on a vaguement conscience que $0 < \sqrt{2}-1 < 1/2$ on obtient même $\delta_n \leqslant \dfrac{1}{2^{2N+3}}$.

Pour avoir $\delta_n \leqslant \dfrac{1}{10^8}$ il SUFFIT donc d'avoir $2^{2N+3} \geqslant 10^{10}$. On peut prendre sa calculatrice, ou bien noter que 2^{10} est un peu supérieur à 10^3 donc $2^{30} > 10^9$ puis $2^{34} > 10^{10}$. Il suffit donc que $2N + 3 \geqslant 34$, c'est-à-dire $N \geqslant 16$.

$$\boxed{\text{Avec } N = 16, \text{ on est bons !}}$$

4 Calcul de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$

4.1 Convergence de quelques séries

1. On peut définir, pour $n \geqslant 1$ l'application $g_n : \theta \mapsto \dfrac{\cos(n\theta)}{n^2}$.
   — Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   — On a $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément.

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge donc simplement sur } \mathbb{R}, \text{ et de plus la fonction somme est continue.}}$$

2. (a) Évidemment $S_n(\theta)$ est la somme de termes d'une suite géométrique (ça surprend en terminale la première fois, je sais !). On en déduit, puisque la raison $\mathrm{e}^{i\theta}$ est différente de 1 (connaissance du cercle trigonométrique...) :

$$\boxed{S_n(\theta) = \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}\cdot}$$

On peut alors facilement majorer le numérateur de $|S_n(\theta)|$ par inégalité triangulaire, fournissant $|S_n(\theta)| \leqslant \dfrac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}\cdot$ Ensuite, si on fait un dessin, on est assez convaincu que le module d'un complexe est MINORÉ par la valeur absolue de sa partie réelle. Si on ne l'est pas en ayant fait un dessin, c'est bizarre. Quoiqu'il en soit, c'est vrai et on le montre facilement avec la définition du (carré du) module (bref : c'est Pythagore !). En notant que $|1-\cos\theta| = 1-\cos\theta$, on obtient bien $|S_n(\theta)| \leqslant \dfrac{2}{1-\cos\theta}\cdot$

Fixons maintenant $\alpha \in]0,\pi[$ et $x \in [\alpha, 2\pi-\alpha]$: on a alors (connaissance de la fonction cos sur le cercle trigonométrique ou via son graphe...) $\cos x \leqslant \alpha$ donc $1-\cos x > 1-\cos\alpha > 0$ donc $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{1-\cos x} \leqslant \dfrac{2}{1-\cos\alpha}$, et comme ceci est valable pour tout $x \in [\alpha, 2\pi-\alpha]$:

$$\boxed{\|S_n\|_{\infty,[\alpha,2\pi-\alpha]} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}\cdot}$$

(b) On note que $\mathrm{e}^{ik\theta} = S_k(\theta) - S_{k-1}(\theta)$, on injecte ceci dans $T_n(\theta)$, on casse la somme en deux, on fait un changement d'indice dans la deuxième somme, on renomme l'indice de la première somme, et on regroupe en faisant attention aux termes de bord pour trouver effectivement :

$$\boxed{T_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n(\theta)}{n+1} - S_0(\theta)}$$

Plisser les yeux en lisant lentement n'a pas suffit à comprendre le corrigé ? C'est normal. Ce calcul il faut le faire de sa propre main, pas lire le calcul d'un autre ; c'est pour ça que je ne l'ai pas écrit. Suivez les consignes et ça va marcher.

(c) Notons $u_k = S_k(\theta)\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$: on a pour tout $k \geqslant 1$: $|u_k| \leqslant \dfrac{2}{1-\cos\theta}\dfrac{1}{k(k+1)} = O(1/k^2)$, donc $\sum u_k$ est absolument convergente donc convergente, donc $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k(\theta)\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$ converge quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs le caractère borné de $(S_n(\theta))$ nous assure que $\dfrac{S_n(\theta)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, $S_n(\theta) = 1$ est constante. Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ est convergente, donc } \sum \frac{\mathrm{e}^{ki\theta}}{k} \text{ converge, donc ses parties réelles et imaginaires aussi.}}$$

C'était bien l'objet de cette question 2 !

3. Tout d'abord le reste R_n est la différence entre la limite de (T_n) et T_n. Puisque

$$T_n(\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - S_0(\theta)$$

on obtient bien par différence :

$$\boxed{R_n(\theta) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{S_n(\theta)}{n+1}}$$

Oui, j'ai fait attention aux signes.

Avec les majorations faites avant, on trouve donc par inégalités triangulaires (en faisant bien attention aux signes des choses pour faire disparaître les valeurs absolues) :

$$|R_n(\theta)| \leqslant \frac{2}{1-\cos\theta}\left(\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{=1/(n+1)} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4}{(1-\cos\alpha)(n+1)}$$

On a donc $\|R_n\|_{\infty,[\alpha,2\pi-\alpha]} \leqslant \dfrac{4}{(1-\cos\alpha)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi :

$$\boxed{(T_n) \text{ converge uniformément sur tout segment } [\alpha, 2\pi - \alpha] \subset]0, 2\pi[}$$

4. Puisque chaque application $\theta \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{n}$ est continue sur $]0, 2\pi[$, la question précédente permet d'appliquer le théorème de continuité pour les sommes de séries : $\theta \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{n}$ est continue sur $]0, 2\pi[$. Sa partie réelle l'est donc aussi :

$$\boxed{S : \theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} \text{ est continue sur }]0, 2\pi[}$$

4.2 Une série entière

1. Pour $r \in [0, 1]$ la suite $\left(\dfrac{\cos(n\theta)}{n} r^n\right)_n$ est bornée, ce qui nous donne directement le résultat en revenant à la définition du rayon de convergence :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{\cos(n\theta_0)}{n} x^n \text{ est supérieur ou égal à 1}}$$

2. C'est une conséquence directe du cours sur les séries entières, le rayon de convergence R étant $\geqslant 1$:

$$\boxed{f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta_0)}{n} x^n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }] - R, R[\text{ donc sur } [0, 1[.}$$

3. Pour une série entière, on peut dériver sous le signe somme sur $] - R, R[$, ce qui donne ici pour $x \in] - 1, 1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta_0) x^{n-1} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{ni\theta_0} x^{n-1}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{i\theta_0} x\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta_0}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta_0} x}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}\left(1 - x\mathrm{e}^{-i\theta_0}\right)}{(1 - x\cos\theta_0)^2 + x^2 \sin^2\theta_0}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta_0} - x}{1 + x^2 - 2x\cos\theta_0}\right) \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\cos\theta_0 - x}{1 + x^2 - 2x\cos\theta_0}}$$

On note que la dérivée de f est également la dérivée de $x \mapsto -\dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2 - 2\cos\theta_0)$ (ce qu'il y a dans le logarithme est strictement positif si on relit le calcul passé !). Ces deux fonctions sont donc égales à une constante près. Mais en 0 elles valent l'une et l'autre 0 ; et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in] - 1, 1[,\ f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta_0).}$$

4. On va à nouveau faire une transformée d'Abel : on trouve d'abord, pour $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ni\theta_0}}{n} x^n = \sum_{k=1}^{n} S_k(\theta_0)\left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) + \frac{S_n(\theta_0)}{n+1} x^{n+1} - S_0(\theta)$$

Par des arguments analogues à ce qu'on a fait plus haut on obtient alors la convergence de $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{ni\theta_0}}{n} x^n$. On prouve la convergence uniforme en estimant le reste :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ni\theta_0}}{n} x^n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k(\theta_0)\left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) - \frac{S_n(\theta_0)}{n+1}$$

puis :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ni\theta_0}}{n} x^n\right| \leqslant \frac{4}{(1 - \cos\theta_0)(n+1)}$$

ce qui nous donne un majorant uniforme du reste, qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement on a bien comme demandé :

$$\boxed{\sum \frac{e^{ni\theta_0}}{n} x^n \text{ converge uniformément sur le segment } [0,1].}$$

5. Dans l'égalité établie à la question 3, regardons ce qui se passe lorsque x tend vers 1^-. Le membre de gauche tend vers $f(1)$ puisqu'on a vu à la question précédente (prendre la partie réelle !) que f était finalement définie et continue en 1. Le membre de droite tend lui vers

$$-\frac{1}{2}\ln\left(2(1-\cos\theta)\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = -\ln(2) - \ln\sin\frac{\theta}{2}.$$

On en déduit par unicité de la limite :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta_0)}{n} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot}$$

Il est rassurant de regarder ce qui se passe pour $\theta = \pi$...

4.3 Un développement en série entière

1. La fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, ainsi que la fonction ln. Il s'agit donc essentiellement de prouver que $1 - 2x\cos a + x^2$ est strictement positif.
Écrivons pour cela $1 - 2x\cos a + x^2 = (x-\cos a)^2 + \sin^2 a \geqslant \sin^2 a > 0$ car $a \in]0,\pi[$.

$$\boxed{g \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. On dérive soigneusement, on factorise dans $\mathbb{C}$ le polynôme $X^2 - 2X\cos a + 1$ (que j'écrirais bien d'abord comme somme de deux carrés puis différence de deux carrés... enfin je vous laisse faire), puis on décompose en éléments simples.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-e^{ia}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-e^{-ia}}\cdot}$$

3. On va travailler sur chacun des deux termes précédents. Des séries géométriques de raison dont le module est < 1 vont apparaître... pour peu qu'on choisisse x dans $]-1,1[$:

$$\frac{1}{x-e^{ia}} = \frac{-e^{-ia}}{1-xe^{-ia}} = -e^{-ia}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-ia}x\right)^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x-e^{-ia}} = \frac{-e^{ia}}{1-xe^{ia}} = -e^{ia}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{ia}x\right)^n$$

On somme et regroupe les termes, pour trouver finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ g'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\cos\left((n+1)a\right)\right)x^n}$$

Le cours nous autorise à primitiver formellement sur $]-R,R[$, donc au moins $]-1,1[$ ici. Un changement d'indice plus tard on trouve :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ g(x) = -\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(pa)}{p}x^p}$$

4. Quand x tend vers 1^-, $g(x)$ tend vers $g(1) = \frac{1}{2}\ln\left(2(1-\cos a)\right) = \ln 2 + \ln\sin\frac{a}{2}$ (on se souvient que g est continue). si on s'y autorise dans le membre de droite. Plus précisément, si on s'autorise à dire que la limite en x de la somme est la somme des limites en x, alors on trouve, et c'est assez rassurant :

$$\boxed{-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(pa)}{p} = \ln 2 + \ln\left(\sin\frac{a}{2}\right)\cdot}$$