Une trigonalisation et une série de fonctions

1 Réduction : des sous-espaces stables

Je prends ici le point de vue consistant à confondre $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: il est parfois dangereux (tant qu'on n'a pas compris la distinction entre des deux espaces), mais efficace quand on a compris la distinction.

1. On obtient facilement (développement par rapport à la dernière ligne :

$$\boxed{\chi_u = \chi_A = (X-1)^2(X+1), \text{ donc } \mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}}$$

Puisque $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, son noyau est de dimension 1, donc la dimension de $\mathrm{Ker}\,(A-I)$ est **strictement** inférieure à la multiplicité de la valeur propre 1, donc :

$$\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2. Dans le noyau de $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on doit trouver $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dans celui de $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il y a $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parions qu'avec $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtiendra une base [1] (X_1, X_2, X_3) de trigonalisation de u. Plus précisément, puisque $u(X_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_2 + X_3$:

$$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Puisque $X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 - X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a quasiment immédiatement :

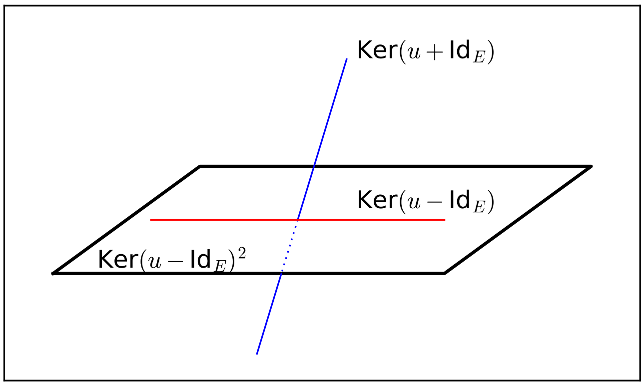
$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. Déjà, $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(X_1)$. Mais si on regarde la matrice de u dans la base (X_1, X_2, X_3), alors on voit que celle de $u - \mathrm{Id}_E$ dans cette base vaut $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et celle de $(u - \mathrm{Id}_E)^2$ vaut $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)^2 = \mathrm{Vect}(X_2, X_3)$. Puisque (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathbb{R}^3$:

1. Le rang se calcule en une seule opération.

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}\left((u - \operatorname{Id}_E)^2\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(u + \operatorname{Id}_E\right).}$$

4. On fait apparaître un plan $(\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)^2)$ contenant une droite $(\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(X_2)$: on a toujours $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(v^2)$!) et enfin une droite non incluse dans le plan précédent (et en constituant donc un supplémentaire) :



5. Une droite est stable par u si et seulement si elle est dirigée par un vecteur propre, donc :

$$\boxed{\text{Il y a deux droites stables par } u : \operatorname{Vect}(X_1) \text{ et } \operatorname{Vect}(X_2)}$$

Le dessin précédent nous propose directement un plan $(\operatorname{Ker}((u - \operatorname{Id}_E)^2))$... qui est effectivement stable par u (noyau d'un polynôme en u, par exemple). Mais on peut aussi s'intéresser à $\operatorname{Vect}(X_1, X_2)$... qui est clairement stable par u.

$$\boxed{\text{Les plans } \operatorname{Vect}(X_1, X_2) \text{ et } \operatorname{Vect}(X_2, X_3) \text{ sont stables par } u.}$$

6. (a) Il s'agit d'un résultat de cours. On prend une base de F qu'on complète en une base de E. Dans cette base, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec A la matrice de v dans la base de F choisie précédemment. On a alors (déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) :

$$\chi_u = \det(X\operatorname{Id}_E - u) = \det(XI - A)\det(XI - C) = \chi_v \chi_C,$$

et ainsi :

$$\boxed{\chi_v \text{ divise } \chi_u}$$

(b) D'après ce qui précède, χ_v est unitaire, de degré 2 et divise $(X-1)^2(X+1)$, donc :

$$\boxed{\chi_v \text{ vaut } (X-1)^2 \text{ ou } (X-1)(X+1).}$$

(c) — Supposons : $\chi_v = (X-1)(X+1)$. L'endomorphisme v possède alors deux valeurs propres, et les vecteurs propres associés sont également vecteurs propres pour u, donc F contient X_1 et X_2, puis est égal au plan engendré par ces deux vecteurs.

— Supposons : $\chi_v = (X-1)^2$. Puisque $\chi_v(v) = 0$, on a $(u - \operatorname{Id}_E)^2(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Ainsi, F est un plan inclus dans le noyau de $(u - \operatorname{Id}_E)^2$... qui est également un plan ! On a alors $F = \operatorname{Ker}((u - \operatorname{Id}_E)^2) = \operatorname{Vect}(X_2, X_3)$.

$$\boxed{\text{Il y a exactement deux plans stables par } v : \text{ceux qu'on avait déjà repérés !}}$$

7. On n'oubliant pas les entiers de $[\![0, 3]\!]$ qui ne sont pas 1 et 2...

$$\boxed{\text{Il y a exactement 6 sous-espaces stables par } u : \text{les 4 déjà vus, ainsi que } \{0\} \text{ et } E.}$$

2 Une série de fonctions classique

1. (a) Pour que la série définissant $S(x)$ soit convergente, il faut déjà que tous les $n+x$ soient différents de zéro, ce qui revient à dire que x n'est pas l'opposé d'un entier strictement positif. Réciproquement, fixons $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$, et définissons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\cdot$ On a alors :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2},$$

donc par comparaison de séries à termes de signe constant, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ est convergente.

$$\boxed{\mathcal{D}_S = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)}$$

(b) Pour $S(0)$, il n'y a pas trop de suspens : c'est la somme de la série nulle. Pour $S(1)$, on passe par des sommes partielles télescopiques :

$$S(1) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

Dans ce calcul, l'existence de la limite est assurée depuis la question précédente, pas a posteriori comme dans les calculs façon terminale...

$$\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1}$$

(c) Ici encore, on va passer par des sommes partielles car si on casse les séries en deux, on trouve des séries individuellement divergentes. On fixe pour cela $x \in \mathcal{D}_f$; on a alors $x+1 \in \mathcal{D}_f$, et :

$$\begin{aligned}
S(x+1) - S(x) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{N+x+1}\right) = \frac{1}{1+x}\cdot
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ S(x+1) = S(x) + \tfrac{1}{x+1}\cdot}$$

On en déduit facilement la valeur de $S(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$: c'est une somme partielle de la série harmonique, dont un équivalent [2] est connu.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.}$$

2. Notons, pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n(n+x)}\cdot$

(a) Pour $x \geqslant 0$, on a la majoration $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{n^2}$ qui nous invite à localiser en fixant $A > 0$:

$$\forall x \in [0, A], \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{A}{n^2}\cdot$$

On a donc $\|f_n\|_{\infty,[0,A]} \leqslant \dfrac{A}{n^2}$ de sorte que par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty,[0,A]}$ est convergente. Ainsi, $\sum f_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $[0, A]$; et comme toutes les f_n sont continues sur $[0, A]$, S l'est également.
Ceci étant vrai pour tout $A > 0$:

$$\boxed{S \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

2. Et même un peu au delà !

(b) Pour le caractère $\mathcal{C}^1$, il n'est même plus utile de localiser : chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, avec :

$$\forall x \in [0, A], \qquad |f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

de sorte que $\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc $\sum f_n'$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$. Résumons :
— $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$;
— chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$;
— $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi :

$$\boxed{S \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$$

(c) Pour le caractère $\mathcal{C}^\infty$, dressons la check-list :
— Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$: OK.
— $\sum f_n$ converge simplement : OK.
— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge uniformément [3] : À VÉRIFIER.
Fixons donc $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \left|f_n^{(k)}(x)\right| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

Ainsi, $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}} = O(1/n^2)$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement [4] donc uniformément, ce qui établit le dernier point de la check-list.

$$\boxed{S \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$$

(d) S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 0[$, $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x}$, donc S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 0[$.
Le même raisonnement s'applique pour montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-n-1, -n[$. La fonction S l'est donc sur la réunion de ces intervalles, ainsi que sur $[0, +\infty[$: c'est gagné.

$$\boxed{S \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur son ensemble de définition.}}$$

3. Fixons $x_0 > 0$ et définissons $\varphi_{x_0} : t \geqslant 0 \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x_0} = \frac{x_0}{t(t+x_0)}$, de sorte que $S(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi_{x_0}(n)$. La décroissance de φ_{x_0} (dériver, ou observer la deuxième expression de $\varphi_{x_0}(t)$) nous assure qu'on a l'encadrement

$$\int_n^{n+1} \varphi_{x_0}(t)dt \leqslant \varphi_{x_0}(n) \leqslant \int_{n-1}^n \varphi_{x_0}(t)dt,$$

ceci respectivement pour tout $n \geqslant 1$ (inégalité de gauche) et tout $n \geqslant 2$ (inégalité de droite). En sommant ces inégalités de 1 à $N \geqslant 2$ à gauche et de 2 à N à droite, on obtient

$$\int_1^{N+1} \varphi_{x_0} \leqslant \sum_{n=1}^N \varphi_{x_0}(n) \leqslant \underbrace{\varphi_{x_0}(1)}_{1} + \int_1^N \varphi_{x_0} \qquad (E)$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, le terme central tend vers $S(x_0)$. À droite, on a :

$$\int_1^N \varphi_{x_0} = [\ln t - \ln(t+x_0)]_1^N = \ln N - \ln(N+x_0) + \ln(1+x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x_0)$$

3. En fait : simplement, mais uniformément à partir d'un certain rang.
4. Ne pas se laisser intimider par la CONSTANTE k!

et de même, $\displaystyle\int_1^{N+1} \varphi_{x_0} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x_0)$, donc en passant (E) à la limite puis en libérant x_0 :

$$\forall x > 0, \qquad \ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant 1 + \ln(1+x).$$

En divisant tout ce beau monde par $\ln x$, on peut gendarmiser, pour obtenir finalement :

$$\boxed{\text{Lorsque } x \text{ tend vers } +\infty,\ S(x) \sim \ln x.}$$

Pour ceux qui ont un doute : $\ln(1+x) = \ln x + \ln(1+1/x) \sim \ln x$.

4. On a déjà vu que S est $\mathcal{C}^\infty$, avec $S' > 0$, donc S est croissante **sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition** (mais pas sur l'ensemble de définition : $S(0) < S(-11/10)$ pas exemple). La limite (et l'aspect) en $+\infty$) est connu ; pour le comportement en -1, on a $S(-1+u) = S(u) - \dfrac{1}{u} \sim -\dfrac{1}{u}$, ce qui donne l'allure du graphe en -1^+ (et -1^-).
   Enfin, la relation $S(x) = S(x+1) - \dfrac{1}{1+x}$ donne également $S(-2+u) = S(-1+u) + O(1) = -\dfrac{1}{u} + O(1)$ d'où l'allure au voisinages droit et gauche de -2 puis de $-n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

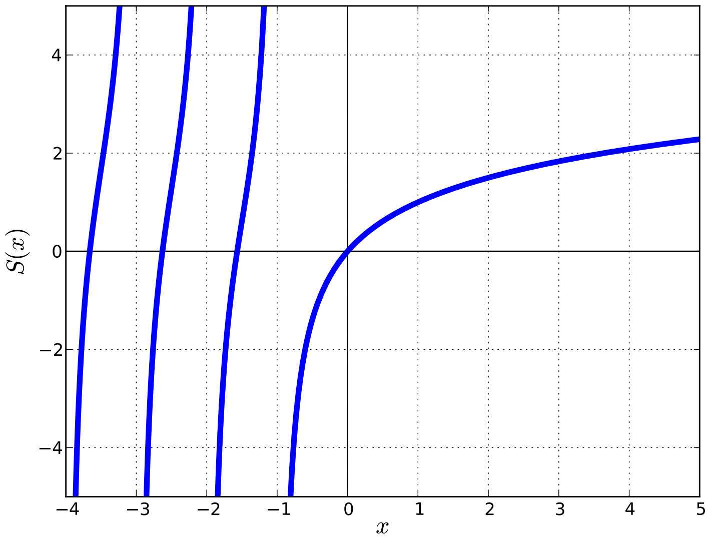


FIGURE 1 – Graphe de S sur $]-4,5]$

5. Dans la question 3, la quantité $\ln(x+1)$ est apparue comme l'intégrale de φ_x sur $[1,+\infty[$, donc comme la somme des $\displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_x$. On va donc exprimer la différence $S(x) - \ln(1+x)$ en exploitant cette forme :

$$\forall x > 0, \qquad S(x) - \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\varphi_x(n) - \int_n^{n+1} \varphi_x \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x), \tag{R}$$

avec pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \varphi_x(n) - \int_n^{n+1} \varphi_x(t)dt = \int_n^{n+1} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \right) dt \\ &= \int_n^{n+1} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{t} \right) - \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{n+x} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

La majoration $\left| \dfrac{1}{t+x} - \dfrac{1}{n+x} \right| = \dfrac{|n-t|}{(t+x)(n+x)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ nous assure que lorsque x tend vers $+\infty$, $g_n(x)$ tend vers $\displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{t} \right) dt = 1/n - \ln(1+1/n)$. Pris d'une furieuse envie de sommer les limites dans la relation (R), on se demande s'il n'y aurait pas convergence uniforme de $\sum g_n$, au moins au voisinage de $+\infty$. Et ici encore, on a $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{n^2}$ pour tout $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, donc il y a effectivement convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet de sommer les limites (théorème de double-limite version séries – qui fournit aussi la convergence de la série limite).

$$\boxed{\text{Lorsque } x \text{ tend vers } +\infty,\ S(x) - \ln(1+x) \text{ tend vers } \sum_{n=1}^{+\infty} (1/n - \ln(1+1/n)).}$$

Pour terminer, on note d'une part que $\ln(1+x) = \ln x + \ln(1+1/x) = \ln x + o(1)$ et d'autre part que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1/n - \ln(1+1/n)) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} (1/n - \ln(1+1/n)) = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1) \right) = \gamma,$$

la constante d'Euler du développement asymptotique $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$.

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty,\ S(x) = \ln x + \gamma + o(1)}$$

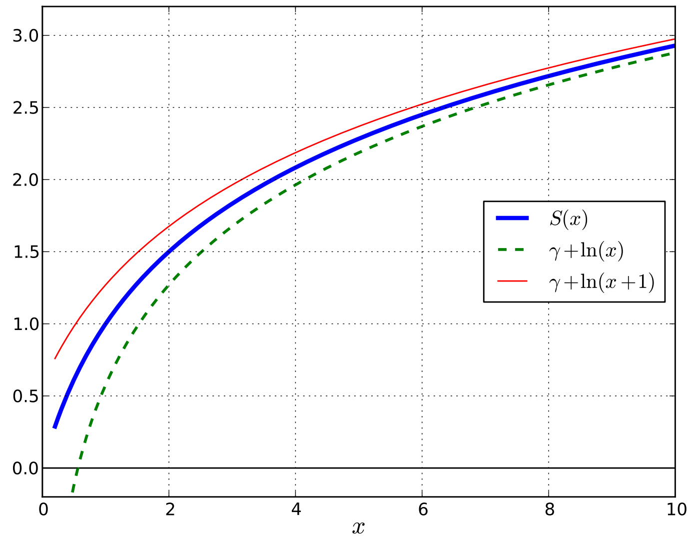


FIGURE 2 – $S(x)$ vs. $\gamma + \ln x$ vs. $\gamma + \ln(x+1)$

Comme toujours, les graphes de ce corrigé ont été réalisés avec Python. La fonction S n'a pas été calculée via des sommes approchantes, mais grâce à la relation $S(x) = \gamma + \dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \gamma + \psi(x+1)$ avec $\gamma \simeq 0.577$ la constante d'Euler et Γ... la fonction d'Euler, dont il sera souvent question d'ici la fin de l'année. La fonction $\psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma} = (\ln \circ \Gamma)'$, plus souvent appelée « digamma » est présente dans la librairie `scipy.special`.