A 2009 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

- On note F l'ensemble des nombres réels positifs non entiers ;
- On note D l'ensemble des nombres complexes de module inférieur strictement à 1.
- Si Z est un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(Z)$ sa partie réelle et $\mathrm{Im}(Z)$ sa partie imaginaire.
- Dans tout le problème, on désigne par g la fonction réelle de variable réelle définie par :

$$g\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$u \longmapsto \frac{1}{1+u}.$$

I Question préliminaire

1) Soit x un réel. Montrer que l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}\ \mathrm{d}u$$

existe si et seulement si $x \in]0,\ 1[$.

L'objet du problème est de calculer la valeur de cette intégrale.

II Une identité intégrale

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et développable en série entière sur $[0,\ 1[$. On note $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les coefficients de son développement.

2) Montrer que l'expression

$$\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\ \mathrm{d}v$$

a un sens pour tout $x > 0$ et tout $y \in]0,\ 1[$.

Pour $x > 0$, on pose

$$S[f](x,\, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\ \mathrm{d}v & \text{pour } y \in]0,\, 1[, \\ \\ \dfrac{f(0)}{x} & \text{pour } y = 0. \end{cases}$$

3) Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $y \mapsto S[f](x, y)$ est continue sur $[0, 1[$.

4) Montrer que pour tout $x \in F$, la fonction $y \mapsto S[f](x,\, y)$ est développable en série entière sur $[0,\, 1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière.

On considère la fonction $\tilde{f}$ définie sur D par la relation :

$$\forall z \in D\ :\ \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Pour tout $x \in F$ et tout $y \in [0,\, 1[$, on considère l'expression :

$$J[f](x,\, y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \mathrm{Re}\left[\int_0^1 e^{i\pi x t} \tilde{f}(-y e^{i\pi t})\ dt\right].$$

5) Calculer, pour tout $x \in F$ et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \cos(\pi(n + x)t)\ \mathrm{d}t.$$

6) Montrer que pour tout $x \in F$, la fonction $y \mapsto J[f](x,\, y)$ est développable en série entière sur $[0,\, 1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière. En déduire que $S[f](x,\, y) = J[f](x,\, y)$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in [0, 1[$.

Pour tout $x \in]0,\, 1[$ et tout $y \in [0,\, 1[$, on pose :

$$C[f](x,\, y) = S[f](x,\, y) + S[f](1 - x,\, y).$$

7) Établir l'identité suivante pour tout $x \in]0,\, 1[$ et tout $y \in [0,\, 1[$:

$$C[g](x,\, y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi x t)}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2} dt.$$

III Noyau de Poisson

Pour tout $y \in [0, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$, on définit le *noyau de Poisson* P par :

$$P(t, y) = \frac{1 - y^2}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2}.$$

8) Établir l'identité suivante pour tout $y \in [0,\, 1[$ et tout $t \in [0,\, 1]$:

$$P(t, y) = \mathrm{Re}\left[\frac{1 + ye^{i\pi t}}{1 - ye^{i\pi t}}\right].$$

9) Montrer que pour $t \in [0,\, 1]$ fixé, la fonction $y \mapsto P(t,\, y)$ est développable en série entière sur $[0,\, 1[$, et calculer les coefficients de son développement en série entière.

10) Établir que pour tout $y \in [0,\, 1[$ on a :

$$\int_0^1 P(t, y)\ \mathrm{d}t = 1.$$

Dans les questions 11) et 12) ci-dessous, on désigne par φ une fonction définie et continue sur $[0,\, 1]$, à valeurs réelles.

11) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,\, 1[$, on a :

$$\lim_{y \to 1} \int_\alpha^1 P(t, y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

et

$$\left| \int_0^\alpha P(t, y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \sup_{t \in [0, \alpha]} |\varphi(t)|\,.$$

12) En déduire que l'on a :

$$\lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(0).$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\varphi(0) = 0$.

IV Application à un calcul d'intégrale

Pour tout $x \in]0,\,1[$ et tout $y \in [0,\,1[$, on pose :

$$A(x,\,y) = \int_0^1 P(t,y)\cos(\pi x t)\ \mathrm{d}t.$$

13) Pour tout $x \in]0,\,1[$ et tout $y \in [0,\,1[$, exprimer $C[g](x,\,y)$ en fonction de $A(x,\,y)$ et de $A(1-x,\,y)$.

14) Pour $x \in]0,\,1[$ fixé, déterminer la limite de $C[g](x,\,y)$ quand y tend vers 1 par valeurs inférieures.

15) En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in]0,\,1[$.

Fin du problème