Intégration

1 Rappels de première année ; intégration sur un segment

Exercice 1 – *Colle 2023-2024 [3/10]*
Montrer que $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{1/n}$ possède une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 – *Colle 2023-2024 [2/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
Déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 – *Colle 2023-2024 [2/10]*
Calculer
$$\int_{3/2}^{5/2} \sqrt{-3+4x-x^2}dx$$

Exercice 4 – *Colle 2023/2024 [8/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt$.

1. Montrer que (I_n) converge.
2. Donner un équivalent simple de $I_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 – *Mines 2016 [9/10]*
Soit f une fonction continue et à valeurs positives sur $[a, b]$. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de
$$I_n = \left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{1/n}$$

Exercice 6 – *CCP 2009 [3/10]*

1. Calculer la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 7 – *Centrale 2010 ; Cauchy-Schwarz un peu fin [7/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $f(0) = 0$. Montrer : $\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2$.

Exercice 8 – *CCP 2018 [5/10]*
Soient a, b tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(a + b - x) = f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b t f(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\mathrm{e}^{it}}{1+\cos^2 t}dt$.

2 Intégrales convergentes et fonctions intégrables

Exercice 9 – *Colle 2023-2024 [5/10]*

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^\alpha}dx$ converge.
2. Donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt$.
3. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{x+\cos(x)}dx$.

Exercice 10 – *Colle 2023-2024 [4/10]*

1. Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}dx$.
2. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}dx$.

Exercice 11 – *Colle 2023-2024 [7/10]*

1. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 – *CCP 2016 [7/10]*

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}dt$.

1. Justifier que I converge.
2. Montrer : $I = \dfrac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt$.
3. Montrer que $t > 0 \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 13 – *TPE 2010 – pas évident, mais intéressant et classique [5/10]*

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) dt$.

Exercice 14 – *Mines 2018 [7/10]*

On définit, pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$.

1. Justifier la définition de f.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ puis de 0.

Exercice 15 – *CCP 2018 [4/10]*

On définit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$.

1. Justifier que I et J sont définis, puis que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Exercice 16 – *IMT 2018 [5/10]*
On s'intéresse à $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{2-\sin^2 u}$.
3. Calculer I en utilisant le changement de variable $u = \mathrm{Arctan}\, t$.

3 Interversions de symboles

Exercice 17 – *Colle 2023-2024 [6/10]*
Nature et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

Exercice 18 – *Colle 2023-2024 [7/10]*
Soit $f \in L^1([0, \mathrm{e}[$. Montrer :

$$\int_0^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\mathrm{e}} f(x)dx.$$

Exercice 19 – *Colle 2023/2024 [8/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt$.

1. Montrer que (I_n) converge.
2. Donner un équivalent simple de $I_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 – *Mines 2022 [4/10] - Perla E.K.*
On s'intéresse ici à $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
3. Calculer I, sachant que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Question supplémentaire : quelles sont les hypothèses manquantes pour rendre vraie l'assertion « $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_{2k}$ et $\sum u_{2k+1}$ convergent. » ?

Exercice 21 – *CCP 2017 [5/10]*
Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{2(1-t)^2}dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Développer en série entière $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

3. En déduire : $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 22 – *TPE 2016 [6/10]*
Après avoir justifié la convergence des deux membres, montrer :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{sh} t}{\mathrm{ch} t}\right) dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 23 – *Mines 2010 – attention à l'interversion [8/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$.

1. Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?
2. Montrer :
$$u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 24 – *CCP 2011 [4/10]*
On définit $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$. Montrer : $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

Exercice 25 – *Mines 2015 [6/10]*
Donner la limite ℓ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Donner ensuite un un équivalent simple de $\ell - I_n$.

4 Intégrales à paramètres

Exercice 26 – *Colle 2023-2024 [7/10]*
On considère la fonction

$$F : x > 0 \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} dt$$

1. Montrer que F est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.
3. Établir une équation différentielle vérifiée par F.

Exercice 27 – *Colle 2023/2024 [9/10]*
On définit l'application

$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto i \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{it^2} dt\right)^2$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, puis expliciter sa valeur.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2} du$ est convergente.
3. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{ix^2t^2}}{t^2+1} dt$ puis de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix^2t^2}}{t^2+1} dt$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2} du$.

Exercice 28 – *CCP 2017 [6/10]*
On définit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} dt$.

1. (a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que f est continue.
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(f(t))\, dt$. Donner la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$.
   Indication : on pourra utiliser $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(t))\, dt$.

Exercice 29 – *CCP 2017 [5/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer, pour $x > 0$, $f(x+1) - f(x)$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ sous forme d'une somme de série.
5. Comment déterminer une expression de $f(x)$ avec une autre méthode ?

Exercice 30 – *ENSEA 2016 [5/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{ixt} dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$.
2. En passant par une équation différentielle, calculer $f(x)$.

Exercice 31 – *Mines 2016 [8/10]*
On définit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de I, puis étudier le caractère $\mathcal{C}^1$.
2. Expliciter $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b + n^2}$.
3. Déterminer un équivalent de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 32 – *CCP 2015 [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$
Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt.$$

En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5 Indications, solutions partielles

Exercice 1 – C'est l'exponentielle d'une somme de Riemann, non ?

Exercice 2 – Inutile de calculer la somme comme partie imaginaire de ... puisque je dirais que n/S_n est l'inverse d'une somme de Riemann...

Exercice 3 – Je poserais bien $x = 2 + \sin(t)$...

Exercice 4 – Une première convergence dominée. Ensuite, $u = t^n$ et encore de la convergence dominée sur $n(I_n - 1)$ (avec éventuellement $\left|\sqrt{1+u} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}u$). Je trouve $I_n = 1 + \frac{1}{2n} + o(1/n)$.

Exercice 5 – La limite de $\|f\|_n$ est bien entendu $\|f\|_\infty$! Exercice difficile car il faut epsiloniser. Tout d'abord (après avoir fixé $\varepsilon_0 > 0$) $\|f\|_n \leqslant (b-a)^{1/n} \|f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$, donc $\|f_n\| \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon_0$ à partir d'un certain rang. Ensuite, il existe x_0 tel que $f(x_0) = \|f\|_\infty$, ainsi qu'un segment $[\alpha, \beta]$ sur lequel $f \geqslant f(x_0) - \varepsilon_0/2$. On minore alors $\|f\|_n$ par une quantité convergeant vers $\|f\|_\infty - \varepsilon_0/2$, donc $\|f_n\| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon_0$ à partir d'un certain rang... et on y est presque !

Exercice 6 – $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t) = 2\ln 2 - 1$. Pour la deuxième somme, la majoration $|\ln(1+u)| \leqslant |u|$ est suffisante.

Exercice 7 – Cauchy-Schwarz sur $[0, x]$ nous donne $f^2(x) = \langle f'|1\rangle^2 \leqslant x \|f'\|_2^2$, etc.

Exercice 8 – Changement de variable $x = a + b - t$, non ? Distinguer ensuite partie réelle (nulle par imparité) et partie imaginaire, elle même ramenée à $[0, \pi]$, puis application du lemme et changement de variable $u = \cos t$. On trouvera environ $i\frac{\pi^2}{2} \cdots$

Exercice 9 – Intégration par partie dans le premier cas... et le second aussi ($\frac{1}{2t} 2t \cos(t^2)$ ou bien après changement de variable $x = t^2$). Et encore une IPP (primitiver le sinus) pour la dernière.

Exercice 10 – Il me semble que $\varphi(2+u) \sim K/\sqrt{u}$, et IPP pour la deuxième qui doit ramener à l'intégrale de quelque chose en $1/x^{3/2}$.

Exercice 11 – Pour la première intégrale, $x = 1/t$ montre que sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$, ça se mange ! Pour la deuxième, IPP pour $f(x) = O(1/x^2)$ en $+\infty$, et $1/t + O(1)$ intégré sur $]x, 1]$ pour obtenir $f(x) \sim -\ln(x)$ en 0^+

Exercice 12 – Linéariser, puis considérer l'intégrale sur $[x, M]$. Que se passe-t-il quand M tend vers $+\infty$? Finalement, $I = \frac{3}{4}\ln 3$.

Exercice 13 – En découpant de façon assez naturelle : $\displaystyle\int_{1/(N+1)}^1 f = \sum_{k=1}^N \int_{1/(k+1)}^{1/k} f$, on trouve finalement $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) dt = 1 - \gamma$.

Exercice 14 – Intégrer par parties... Montrer que la deuxième intégrale est contrôlée par le terme tout intégré, éventuellement avec une deuxième IPP !

Exercice 15 – Très vieux classique...Changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, puis (dans la somme) encore un changement de variable $x = 2u$... pour trouver finalement $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 16 – On aura évidemment fait le changement de variable $x = \sin u$, et finalement : $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Exercice 17 – Convergence par TSSA (+CVD). Les deux théorèmes standards d'interversion ne passent pas, mais OK via TCD sur sommes partielles. Ensuite, pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^3}$, au delà de $t = \sqrt[3]{2}u$, bof...

Exercice 18 – CVD avec indicatrice, domination par $2|f|$.

Exercice 19 – Une première convergence dominée. Ensuite, $u = t^n$ et encore de la convergence dominée sur $n(I_n - 1)$ (avec éventuellement $\left|\sqrt{1+u} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}u$). Je trouve $I_n = 1 + \frac{1}{2n} + o(1/n)$.

Exercice 20 – Straightforward... On réalise le bricolage classique $\zeta(2) = I + \frac{1}{4}\zeta(2)$ en séparant les indices pairs et impairs, qui a poussé à la question bonus. Une condition supplémentaire suffisante est que la série soit à termes positifs. Ce n'est pas vraiment un résultat de cours, mais la condition de positivité est un joker raisonnable. C'est un bon exercice que de prouver l'assertion sous cette condition. Et c'est aussi un bon exercice de chercher un contre-exemple sans cette hypothèse supplémentaire.

Exercice 21 – Je trouve la formule demandée par interversion (sans finesse), le développement en série entière de $\frac{1}{(1-t)^2}$ étant simplifié... quand on a vu que c'est une dérivée (et qu'on connaît son cours).

Exercice 22 – $u = \mathrm{th}(t)$; $\frac{1}{1-u^2} = \cdots$

Exercice 23 – Pour justifier $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{n(1+k)}\right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^k t^{n(1+k)} dt\right)$, regrouper les termes par deux, et on a alors (avec $g_k = f_{2k} + f_{2k+1}$) : $\int |g_k| = O(1/k^2)$... Ensuite, $\left|\frac{1}{1+u} - (1-u)\right| \leqslant u^2$, donc :

$$\left|\frac{1}{kn+1} - \left(\frac{1}{kn} - \frac{1}{k^2n^2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{k^3n^3} \cdots$$

Exercice 24 – Il s'agit seulement de justifier l'interversion dans le calcul :

$$\int_2^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_2^{+\infty} \frac{dx}{n^x}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[-\frac{n^{-x}}{\ln n}\right]_2^{+\infty}$$

Exercice 25 – par convergence dominée, $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ensuite, via $x^n = u$:

$$I_n - 1 \sim \frac{1}{n}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} du\right).$$

On peut même montrer que cet équivalent vaut $\frac{\gamma}{n}$: considérer $\alpha_n = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt$ et $\beta_n = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. On a $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{u} du$, $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} du$, et

$$\alpha_n - \beta_n = \underbrace{\int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt}_{1+1/2+\cdots+1/n} - \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma,$$

le calcul de l'intégrale s'obtenant après un ou deux changements de variable!!!

Exercice 26 – Il me semble que $F(x) - 1/x = o(1/x)$ par VCD, et qu'après IPP, $F'(x) = 2F(x) + \frac{1}{x}\cdot$

Exercice 27 – F est constante donc égale à $F(0) = i\pi/4$. Ensuite, beaucoup d'IPP...
La dernière étape consiste à justifier que l'intégrale recherchée est de partie entière positive (par exemple en sommant une série alternée). Finalement, on trouve $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$.

Exercice 28 – Ralala, si seulement on avait traité en détail la fonction Γ d'Euler... Bon, je trouve $\varphi'(x) = \ln \frac{f(x)}{f(x-1)} = \ln x$, donc $\varphi(x) = x\ln x - x + K$, puis $\frac{(-1)^n}{v_n} = \frac{(-1)^n}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$, d'où la convergence.

Exercice 29 – Qu'on écrive $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f(x+n-1) - f(x+n))$ ou qu'on développe $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{-t})}$ puis qu'on fasse une interversion... on trouve : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+n)^2}$.

Exercice 30 – $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{x-i}{x^2+1}f(x)$, puis $f(x) = K\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}(x)i/2}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$ (avec $K = \sqrt{\pi}$ accessoirement).

Exercice 31 – L'inégalité $\mathrm{e}^t \geqslant 1+t$ pourra servir. L'interversion somme/intégrale demande du soin : pour majorer ce qu'on imagine, j'ai utilisé $|\sin(\alpha x)| \leqslant \alpha x$. Une comparaison somme-intégrale (à α fixé) me donne : $I(\alpha) \underset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ (et l'énoncé était donc vache... si c'était le bon).

Exercice 32 – Considérer $\varphi : t \mapsto f(tx)$; « intégrer sa dérivée » ; changement de variable ; Régularité des intégrales à paramètres.