PC* – mathématiques **vendredi 24 avril 2009**
Concours commun Mines-Ponts, corrigé de la deuxième épreuve **Édouard Lebeau**

Thèmes abordés. Intégrales généralisées, intégrales paramétrées, séries entières.

Ce problème propose le calcul de l'intégrale $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u$ pour $x \in]0, +\infty[$. On peut remarquer que cette intégrale est égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$.

On rencontre souvent le calcul de cette intégrale dans des exercices d'oraux, par une autre méthode, qui sera présentée en exercice dans l'annexe à la fin de ce corrigé.

Question 1. La fonction $\varphi_x : x \mapsto \dfrac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}$ est continue et positive sur $]0,1]$

Pour $x \geqslant 1$, la minoration $\forall u \in]0,1]$, $\varphi_x(u) \geqslant \dfrac{1}{2}u^{-x} \geqslant 0$ montre que $\mathrm{I}(x)$ n'existe pas car l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^{-x}\,\mathrm{d}u$ diverge dans ce cas.

De même, pour $x \geqslant 1$, la minoration $\forall u \in]0,1]$, $\varphi_x(u) \geqslant \dfrac{1}{2}u^{x-1} \geqslant 0$ montre que $\mathrm{I}(x)$ n'existe pas car l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\,\mathrm{d}u$ diverge dans ce cas.

Enfin, pour $x \in]0,1[$, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 u^{-x}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\,\mathrm{d}u$ existent (car $-x > -1$ et $1 - x > -1$), donc $\mathrm{I}(x)$ existe car $\forall u \in]0,1]$, $0 \leqslant \varphi_x(u) \leqslant u^{-x} + u^{x-1}$.

Question 2. Soit $y \in]0,1[$. Soit $x > 0$. La fonction f étant développable en série entière sur $[0,1[$, elle est de classe C^∞ sur cet intervalle. En particulier, elle est continue sur $[0,y]$ donc bornée sur cet intervalle.

La fonction $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$ est continue sur $]0,1]$ avec

$$\forall v \in]0,1], \qquad \left|v^{x-1}f(yv)\right| \leqslant v^{x-1} \times \sup_{u\in[0,y]} |f(u)|\,,$$

ce qui montre que cette fonction est intégrable sur $]0,1]$.

Remarque. On peut se demander pourquoi y est choisi non nul.

Question 3. Là encore, on peut se demander pourquoi le cas $y = 0$ est considéré séparément puisque la valeur donnée par l'énoncé pour $y = 0$ est précisément la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 v^{x-1}f(yv)\,\mathrm{d}v$ dans ce cas !

On va appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale.

Fixons $x > 0$ et considérons la fonction $\Phi :]0,1] \times [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(v,y) = v^{x-1}f(yv)$.

Pour tout v dans $]0,1]$, la fonction $y \mapsto \Phi(v,y)$ est continue sur $[0,1[$.

Pour tout y dans $[0,1[$, la fonction $v \mapsto \Phi(v,y)$ est continue et intégrable sur $[0,1[$, comme on l'a vu à la question 2.

Enfin, pour tout y_0 dans $[0,1[$, on la domination suivante :

$$\forall (v,y) \in]0,1] \times [0,y_0], \qquad |\Phi(v,y)| \leqslant v^{x-1} \sup_{u\in[0,y_0]} |f(u)|\,,$$

où la fonction $v \mapsto v^{x-1} \sup_{u\in[0,y_0]} |f(u)|$ est continue et intégrable sur $]0,1]$.

Le théorème de continuité sous l'intégrale s'applique : la fonction $y \mapsto \mathrm{S}[f](x,y)$ est continue sur $[0,1[$.

Question 4. Pour tout $(v,y) \in]0,1] \times [0,1[$, on a : $v^{x-1}f(yv) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n v^{n+x-1}$.

Fixons x dans F (là encore, on peut se demander quelle est la pertinence de ce choix, le raisonnement étant valable pour tout $x > 0$) et fixons y dans $[0,1[$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, définissons la fonction $\mathrm{A}_n : v \mapsto a_n y^n v^{n+x-1}$ sur $]0,1]$. C'est une fonction continue et intégrable sur $]0,1]$, et la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ converge simplement sur $]0,1]$. Sa somme est la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$, qui est continue sur $]0,1]$.

Pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme, il n'y a plus qu'à montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 |\mathrm{A}_n|$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 |\mathrm{A}_n| = |a_n|\, y^n \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{x}|a_n|y^n$, ce qui prouve la convergence attendue, car la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|y^n$ converge (une série entière converge absolument sur son intervalle ouvert de convergence).

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :

$$\mathrm{S}[f](x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n.$$

Cette formule étant valable pour tout y dans $[0,1[$, on a montré que la fonction $y \mapsto \mathrm{S}[f](x,y)$ est développable en série entière sur $[0,1[$.

Remarque 1. Le raisonnement de cette question résout simultanément les questions 2, 3 et 4. Avec un peu de prévoyance, on pouvait court-circuiter grandement cet énoncé !

On objectera, probablement à raison, que l'auteur du sujet tenait à tester les candidats sur le théorème de continuité sous l'intégrale.

Remarque 2. La fonction $v \mapsto v^{x-1} f(yv)$ n'étant pas nécessairement prolongeable par continuité en 0, il était exclu d'espérer intégrer terme à terme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ sur $[0,1]$ par convergence normale.

Cependant, on peut remarquer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{A}_n$ converge normalement sur $[0,1]$, ce qui permet l'intégration terme à terme de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n$. Il suffit alors d'ajouter le terme manquant par linéarité de l'intégrale.

Question 5. On obtient facilement $\mathrm{I}_n(x) = (-1)^n \dfrac{\sin x\pi}{\pi(n+x)}$ (et cette fois, il est essentiel que x ne soit pas un entier pour que $\mathrm{I}_n(x)$ soit bien défini).

Question 6. On commence par écrire

$$\mathrm{J}[f](x,y) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n(-y)^n \cos(t(x+n))}_{h_n(t)} \right) \mathrm{d}t,$$

et cette fois, on peut intégrer terme à terme par convergence normale car $\sup_{t\in[0,1]} |h_n(x)| \leqslant |a_n|y^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|y^n$ converge.

Après intégration terme à terme, on obtient

$$\mathrm{J}[f](x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n = \mathrm{S}[f](x,y).$$

Question 7. Commençons par remarquer que le développement en série entière de la fonction g est : $\forall u \in [0,1[$, $g(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$.

La fonction $\tilde{g}$ est donc donnée par : $\forall z \in \mathrm{D}$, $\tilde{g}(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \dfrac{1}{1+z}$.

Prenons x dans $]0,1[$ et y dans $[0,1[$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}[g](x,y) = \mathrm{J}[g](x,y) = &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \operatorname{Re}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\pi x t}}{1 - y\mathrm{e}^{i\pi t}}\, \mathrm{d}t \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \operatorname{Re}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\pi x t}(1 - y\mathrm{e}^{-i\pi t})}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) - y\cos(\pi(x-1)t)}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$\mathrm{S}[f](1-x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) - y\cos(\pi x t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ \mathrm{d}t.$$

En ajoutant les deux, on trouve bien

$$\mathrm{C}[f](x,y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi x t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ \mathrm{d}t.$$

Question 8. Remarquons d'abord que pour y dans $[0,1[$ et t dans $[0,1]$, on a : $\left|y\mathrm{e}^{i\pi t}\right| < 1$ donc $1 - y\mathrm{e}^{i\pi t} \neq 0$.

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+y\mathrm{e}^{i\pi t}}{1-y\mathrm{e}^{i\pi t}}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{(1+y\mathrm{e}^{i\pi t})(1-y\mathrm{e}^{-i\pi t})}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1-y^2+2iy\sin\pi t}{1-2y\cos\pi t+y^2}\right] = \mathrm{P}(t,y).$$

Question 9. L'inégalité $\left|y\mathrm{e}^{i\pi t}\right| < 1$ pour y dans $[0,1[$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(t,y) &= \mathrm{Re}\left((1+y\mathrm{e}^{i\pi t})\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \mathrm{e}^{in\pi t}\right) \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \mathrm{e}^{in\pi t} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)\pi t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} y^n \mathrm{e}^{in\pi t}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} y^n \cos(n\pi t). \end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto \mathrm{P}(t,y)$ est bien développable en série entière sur $[0,1[$.

Question 10. On intègre terme à terme par convergence normale : $\sup\limits_{t\in[0,1]} |y^n\cos(n\pi t)| \leqslant y^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} y^n$ converge.

Question 11. Fixons α dans $]0,1[$.

La fonction $t \mapsto \cos(\pi t)$ est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi, pour y fixé dans $[0,1[$, la fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t,y)$ est décroissante sur $[0,1]$. On en déduit les inégalités suivantes :

$$\left|\int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\right|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\,|\varphi(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{P}(\alpha,y)\int_\alpha^1 |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t.$$

On remarque que $\mathrm{P}(\alpha,y)$ tend vers 0 quand y tend vers 1 (car le dénominateur tend vers $2(1-\cos(\pi\alpha))$, qui est non nul). Ainsi, par encadrement, on obtient

$$\lim_{t\to 1}\int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

De plus, utilisant à nouveau la positivité de $\mathrm{P}(t,y)$, on obtient aussi :

$$\left|\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\,|\varphi(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\ \mathrm{d}t \times \sup_{t\in[0,\alpha]}|\varphi(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,\alpha]}|\varphi(t)|$$

car $\displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\ \mathrm{d}t = 1$.

Question 12. Commençons par supposer que $\varphi(0)$ est nul. Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de φ, il existe $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall t \in [0,\alpha]$, $|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.

Pour un tel α, on obtient donc $\left|\displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ d'après la deuxième majoration de la question 11, et cette majoration est valable pour tout y dans $[0,1[$.

D'après la première propriété de la question 11, il existe y_0 dans $[0,1[$ tel que pour tout y dans $[y_0,1[$, on ait : $\left|\displaystyle\int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout y dans $[y_0,1[$, on obtient donc : $\left|\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$.

On a alors montré ceci :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists y_0 \in [0,1[, \qquad \forall y \in [y_0,1[, \qquad \left|\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a montré précisément ceci : $\lim_{y\to 1}\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = 0$ sous l'hypothèse $\varphi(0) = 0$.

Dans le cas général, on remarque l'égalité $\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t - \varphi(0) = \int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\left(\varphi(t)-\varphi(0)\right)\ \mathrm{d}t$, et cette différence tend vers 0 car la fonction $t \mapsto \varphi(t) - \varphi(0)$ est continue sur $[0,1]$ et s'annule en 0.

Question 13. On trouve $\mathrm{C}[g](x,y) = \dfrac{\pi}{(1+y)\sin(\pi x)}\left(\mathrm{A}(x,y) + \mathrm{A}(1-x,y)\right)$.

Question 14. On applique le résultat de la question 12 avec $\varphi(t) = \cos(\pi x t) + \cos(\pi(1-x)t)$ et on obtient :

$$\lim_{y\to 1^-} \mathrm{C}[g](x,y) = \frac{\pi}{2\sin(\pi x)} \times 2 = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Question 15. Ici, on a $\mathrm{I}(x) = \int_0^1 \left(u^{x-1} + u^{-x}\right) g(u)$ et $\mathrm{C}[g](x,y) = \int_0^1 \dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+uy}\ \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ pour x dans $]0,1[$ et y dans $[0,1[$.

On aimerait que $\mathrm{I}(x)$ soit la limite de $\mathrm{C}[g](x,y)$ quand y tend vers 1. Pour cela, il suffit de remarquer que pour x fixé dans $]0,1[$, la fonction $y \mapsto \int_0^1 \dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+uy}\ \mathrm{d}u$ est bien définie sur $[0,1]$ et qu'elle est continue sur $[0,1]$ d'après le théorème de continuité sous l'intégrale (on utilise la domination $\left|\dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+uy}\right| \leqslant u^{x-1} + u^{-x}$.

On fait donc tendre y vers 1 par valeurs inférieures, et on obtient $\mathrm{I}(x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

Annexe

1. Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{I}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{k-x+1}\right) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u} u^{n+1}\ \mathrm{d}u.$$

En déduire l'égalité suivante :

$$\mathrm{I}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2x}{x^2-k^2}.$$

2. Soit $x \in]0,1[$. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par sa restriction à $[-\pi,\pi]$, donnée par $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $a_x(t) = \cos(xt)$.

En déduire la valeur de $\mathrm{I}(x)$.

Ce corrigé a été rédigé par Édouard Lebeau, professeur de mathématiques en PC* au lycée Henri Poincaré de Nancy.
`edouardlebeau-ups@yahoo.fr`