Intégration ; suites et séries de fonctions CCP 2013 Maths 2 PC

Ce corrigé a été écrit par Denis Jourdan (PC* 942) et retouché (à la marge) par mes soins.

Partie I

I-1.1.

▷ $f : t \longmapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

▷ $f(t) = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2))}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ donc f se prolonge par continuité en 0, donc f est intégrable sur $]0,1]$.

▷ $\forall t \geqslant 1,\ |f(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$

$$\boxed{t \longmapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\text{, en particulier } K = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \text{ existe.}}$$

I-1.2. L'application $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,A]$ et tend vers 1 en 0 donc se prolonge par continuité en 0 ; elle est donc intégrable sur $]0,1]$ (ou encore : l'intégrale est faussement impropre en 0), donc

$$\boxed{D(A) = \int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

I-1.3. Soient $A > 0$ puis $\varepsilon \in]0,A[$. Les fonctions $u : t \longmapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon, A]$, donc en intégrant par parties, il vient :

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\dfrac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc en passant la relation précédente la limite lorsque $\varepsilon \to 0$: $D(A) = \dfrac{1-\cos(A)}{A} + \displaystyle\int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Mais $\left|\dfrac{1-\cos(A)}{A}\right| \leqslant \dfrac{2}{A}$, donc $D(A) \underset{A\to+\infty}{\to} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = K$ ce qui donne la convergence et la valeur de l'intégrale :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = K}$$

I-2.1. Posons, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-tx}$ et vérifions les hypothèses du *théorème de continuité sous le signe* $\displaystyle\int$:

▷ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

▷ pour tout $x \in \mathbb{R}_+, t \longmapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$;

▷ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)| \leqslant \varphi(t) := \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et φ est continue (par morceaux) intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf I.1.1)

$$\boxed{L : x \longmapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$$

I-2.2. On conserve les notations précédentes et, après avoir fixé $a > 0$, on vérifie les hypothèses du *théorème de dérivation sous le signe* $\int$ *:*

- ▷ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-tx}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-tx}$.
- ▷ Pour tout $x \geqslant a$, $t \longmapsto g(x,t)$, $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ▷ Pour tout $x \geqslant a$, $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ainsi que $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ grâce à la majoration

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}.$$

(Le membre de droite définit une fonction (de t) continue, qui tend vers 0 en 0 et est négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$)

- ▷ Pour tout $x \geqslant a$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-at} \leqslant 2\mathrm{e}^{-at} =: \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction de référence)

$$\boxed{\begin{array}{c} L \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et ce pour tout } a > 0, \text{ donc } L \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \\ \text{De plus pour tout } x > 0, L'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \text{ et } L''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \end{array}}$$

I-2.3. Commençons par établir le :

Lemme : Si $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et continue et admet une limite finie en 0 et en $+\infty$, alors f est bornée sur $]0, +\infty[$.

[*Preuve du lemme* : f admet une limite finie en 0 et en $+\infty$ donc il existe $a > 0$ et $b > a$ tels que $|f|$ est majorée par une constante M sur $]0, a]$ et sur $[b, +\infty[$. D'autre part f est continue sur le segment $[a, b]$ donc est bornée sur ce segment. D'où le résultat voulu.]

L'application $t \longmapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers $\dfrac{1}{2}$ en 0 et vers 0 en $+\infty$, donc d'après le lemme, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ par une constante M_1.

De même, $t \longmapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers 0 en 0 et vers 0 en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ par une constante M_2.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$. Donc :

$$x\,|L(x)| \leqslant x\int_0^{+\infty} \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \leqslant M_1 x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = M_1.$$

De même :

$$x\,|L'(x)| \leqslant x\int_0^{+\infty} \left|\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \leqslant M_2 x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = M_2$$

En particulier pour tout $x > 0$, $|L(x)| \leqslant \dfrac{M_1}{x}$ et $|L'(x)| \leqslant \dfrac{M_2}{x}$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} L'(x) = \lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.}$$

I-2.4. Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car son module vaut $t \longmapsto \mathrm{e}^{-tx}$. Cela permet d'écrire :

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t\right)$$

Or

$$\int_0^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)A}}{\mathrm{i}-x} - \frac{1}{\mathrm{i}-x} \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{1}{x-\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}$$

(en effet $\left|\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)A}}{\mathrm{i}-x}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-xA}}{\sqrt{x^2+1}} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$).

Donc $\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{x^2+1}$ et finalement :

$$\boxed{L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)}.}$$

I-2.5. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0,\ L'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \frac{-1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C$$

Or $L'(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc $C = 0$ et

$$\boxed{L'(x) = \frac{-1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Une intégration par parties indique ensuite que :

$$L(x) = xL'(x) - \int xL''(x)\,\mathrm{d}x = xL'(x) - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + Cte$$

Or $\frac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2x}$ donc $\frac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et $L(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc $Cte = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x > 0,\ L(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Or L est continue en 0 d'après **I-2.1** donc $L(0) = \lim_{x\to0^+} L(x) = \frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{K = L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

I-3.1.

- ▷ $f : u \longmapsto \frac{\ln(u)}{1-u}$ est continue sur $]0,1[$.
- ▷ $|f(u)| \underset{u\to0}{\sim} |\ln(u)|$ donc $\sqrt{u}|f(u)| \underset{u\to0}{\to} 0$ *i.e.* $|f(u)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$.
  Or $u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1/2]$, donc f aussi.
- ▷ $f(1-h) = \frac{\ln(1-h)}{-h} \underset{h\to0}{\to} 1$ donc f se prolonge par continuité en 1 donc est intégrable sur $[1/2,1[$.

$$\boxed{u \longmapsto \frac{\ln(u)}{1-u} \text{ est intégrable sur }]0,1[}$$

I-3.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $g_k : u \longmapsto u^k\ln(u)$ est continue sur $]0,1]$.
Si $k \geqslant 1$, $g_k(u) \underset{u\to0}{\to} 0$ donc g_k se prolonge par continuité en 0, donc est intégrable sur $]0,1]$

Si $k = 0$, alors $g_0 : u \longmapsto \ln(u)$ est intégrable sur $]0,1]$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u$ existe.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Les fonctions $u \longmapsto \dfrac{u^{k+1}}{k+1}$ et $u \longmapsto \ln(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon, 1]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_\varepsilon^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\ln(u)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{u^k}{k+1}\,\mathrm{d}u$$

Le crochet tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = \frac{-1}{(k+1)^2}}$$

I-3.3. Vérifions les hypothèses du *théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque* (ici $]0,1[$) :

- ▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : u \longmapsto u^k \ln(u)$ est continue (par morceaux) intégrable sur $]0,1]$, donc sur $]0,1[$
- ▷ $\forall u \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(u) = \frac{\ln(u)}{1-u}$ (série géométrique) et $u \longmapsto \dfrac{\ln(u)}{1-u}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$
- ▷ La série $\displaystyle\sum \int_0^1 |g_k(u)|\,\mathrm{d}u$ converge (en effet, $\displaystyle\int_0^1 |g_k(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^1 -u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(k+1)^2}$)

Donc $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(u)\,\mathrm{d}u$, c'est à dire :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie II

II-1. *Théorème de convergence dominée :* Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.

Si

- $\forall t \in I,\ f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} f(t)$
- la fonction f est continue par morceaux sur I
- il existe φ continue par morceaux, positive et **intégrable sur I** telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

II-2.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $g_n(t) = f(t^n)$ et on vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0,1]$
- ▷ $\forall t \in [0,1],\ g_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} g(t) := \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0,1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$ et g est continue par morceaux sur $[0,1]$ (elle est en escalier)
- ▷ $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ |g_n(t)| \leqslant M$ où M est le maximum de la fonction continue f sur le segment $[0,1]$ et la fonction constante égale à M est intégrable sur le segment $[0,1]$

Le *théorème de convergence dominée* conclut :

$$\boxed{I_n = \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0)}$$

II.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto t^n$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $]0,1]$, le changement de variable $x = t^n$ fournit : $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}x$ donc $nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}x^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$

Posons, pour $x \in]0,1]$, $h_n(x) = \dfrac{f(x)}{x}x^{\frac{1}{n}}$ et vérifions les hypothèses du *théorème de convergence dominée* :

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue sur $]0,1]$
- ▷ $\forall x \in]0,1],\ h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{f(x)}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$
- ▷ $\forall x \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |h_n(x)| \leqslant \left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ (car $|x|^{1/n} \leqslant 1$) et par hypothèse $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$

$$\boxed{nI_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x}$$

II-2.3. $x \longmapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a déjà vu en **I-1.2** que $u \longmapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : $n\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Or $u \longmapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ est continue, positive, intégrable sur $]0,1]$ et n'est pas la fonction nulle, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u > 0$

$$\boxed{\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

II-3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $u \longmapsto u^{\frac{1}{n}}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ donc en faisant le changement de variable $t = u^{\frac{1}{n}}$:

$t \longmapsto f(t^n)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ ssi $u \longmapsto \dfrac{1}{n}f(u)u^{\frac{1}{n}-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Or $\forall u \geqslant 1,\ \left|\dfrac{1}{n}f(u)u^{\frac{1}{n}-1}\right| \leqslant |f(u)|$ (car $0 \leqslant u^{\frac{1}{n}-1} \leqslant 1$) et par hypothèse f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

En définitive : $t \longmapsto f(t^n)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc

$$\boxed{A_n = \int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$$

II-3.2. On a de plus :$A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n}f(u)u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$, donc $nA_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u$ où l'on a posé $g_n(u) = \dfrac{f(u)}{u}u^{\frac{1}{n}}$.

Vérifions les hypothèses du *théorème de convergence dominée* :

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $[1,+\infty[$
- ▷ $\forall u \in [1,+\infty[,\ g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{f(u)}{u}$ et $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est continue sur $[1,+\infty[$
- ▷ $\forall u \in [1,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n(u)| \leqslant |f(u)|$ (car $0 \leqslant u^{\frac{1}{n}-1} \leqslant 1$) et par hypothèse f est intégrable sur $[1,+\infty[$

$$\boxed{nA_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

II-4.1. Soit $n \geqslant 2$ et $A > 1$ Le changement de variable $u = t^n$ conduit à : $C_n(A) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{A^n} \sin(u)u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$.

Posons $f(u) = 1 - \cos(u)$ de sorte que $f'(u) = \sin(u)$ et $g(u) = u^{\frac{1}{n}-1}$, donc $g'(u) = (\dfrac{1}{n} - 1)u^{\frac{1}{n}-2}$.

Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1, A^n]$, donc une intégration par parties fournit :

$C_n(A) = \left[\dfrac{1}{n}(1-\cos(u))u^{\frac{1}{n}-1}\right]_1^{A^n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$

$$\boxed{C_n(A) = \frac{1-\cos(A)}{n}A^{1-n} - \frac{1-\cos(1)}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u}$$

II-4.2. Comme $n \geqslant 2$, $\dfrac{1-\cos(A)}{n} A^{1-n} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$

De plus, pour $u \geqslant 1$, $\left|\dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \dfrac{2}{u^{2-\frac{1}{n}}} \leqslant \dfrac{2}{u^{\frac{3}{2}}}$ (car $2-\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{3}{2}$ et $u \geqslant 1$ donc $u^{1-\frac{1}{n}} \geqslant u^{\frac{3}{2}}$) et la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc : $u \longmapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement $C_n(A) \underset{A\to+\infty}{\to} -\dfrac{1-\cos(1)}{n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\, du$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, dt$ est donc prouvée

II-4.3. ▷ D'après ce qui précède, $n\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t = \cos(1) - 1 - \left(\dfrac{1}{n}-1\right)\int_1^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}u$

Montrons avec le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\, \mathrm{d}u$

- ⋆ Pour tout $n \geqslant 2$, $h_n : u \longmapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}$ est continue sur $[1,+\infty[$
- ⋆ $\forall u \geqslant 1$, $h_n(u) \underset{n\to+\infty}{\to} h(u) := \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$ et h est continue sur $[1,+\infty[$
- ⋆ $\forall n \geqslant 2, \forall u \geqslant 1$, $|h_n(u)| = \varphi(u) := \dfrac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}} \leqslant \dfrac{2}{u^{3/2}}$ (en effet, $2-\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{3}{2}$ et $u \geqslant 1$ donc $u^{1-\frac{1}{n}} \geqslant u^{\frac{3}{2}}$).

  La fonction φ est indépendante de n, continue et intégrable sur $[1,+\infty[$

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\, \mathrm{d}u$

$$\boxed{n\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \cos(1) - 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\, \mathrm{d}u}$$

▷ D'autre part, on a vu en **II.2.3** que $n\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \dfrac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u$.

Or il a été établi en **I.1.3** que, pour $\varepsilon \in]0,1[$, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \dfrac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, il vient comme en **I.1.3**

$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = 1 - \cos(1) + \int_0^1 \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$

$$\boxed{n\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \cos(1) + \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t}$$

En définitive :

$$\boxed{n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t = n\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t + n\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t = K = \frac{\pi}{2}}$$

Partie III

III-1.1 Si $|x| < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ converge et :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}}$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

III-1.2 Il découle immédiatement des formules précédentes que

$$\boxed{F(x) \underset{x\to1^-}{\to} +\infty \qquad (1-x)F(x) = x \underset{x\to1^-}{\to} 1 \qquad (1-x)F'(x) = \frac{1}{1-x} \underset{x\to1^-}{\to} +\infty \qquad (1-x)^2F'(x) = 1 \underset{x\to1^-}{\to} 1}$$

III-2.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

▷ Soit $a \in]-1,1[$. Pour $x \in [-a,a], |x| \leqslant a$, donc $|x|^n \leqslant a^n$ et $1-x^n \geqslant 1-|x|^n \geqslant 1-a^n > 0$ donc $\forall x \in [-a,a], |u_n(x)| \leqslant \alpha_n := \dfrac{a^n}{1-a^n}$. Ainsi, $\|u_n\|_\infty^{[-a,a]} := \sup\limits_{x\in[-a,a]} |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$.

Or $\sum \alpha_n$ converge car $\alpha_n \geqslant 0$ et $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n \geqslant 0$ et la série géométrique $\sum a^n$ converge.

Donc $\sum \|u_n\|_\infty^{[-a,a]}$ converge *i.e.* la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

▷ Toutes les fonctions u_n sont continues sur $[-a,a]$ et on vient de montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$, donc F est définie et continue sur $[-a,a]$. Ceci étant vrai pour tout $a \in]0,1[$) :

$$\boxed{F : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \text{ est définie et continue sur }]-1,1[}$$

III-2.2 Soit $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$$

Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^n}{1-x^n} \geqslant x^n$ donc $F(x) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$ donc d'après **III.1.2**,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to1^-}{\to} +\infty}$$

Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^n} \geqslant \dfrac{x^n}{n}$ donc $F(x) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

$$\boxed{(1-x)F(x) \underset{x\to1^-}{\to} +\infty}$$

III-3.1 Soit $x_0 \in]0,1[$. L'application $u \longmapsto \dfrac{\ln(u)}{\ln(x_0)}$ est une *bijection strictement décroissante de classe* $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ donc le changement de variable $u = x_0^t$ *i.e.* $t = \dfrac{\ln(u)}{\ln(x_0)}$ montre que $t \longmapsto f(x_0^t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $u \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x_0)} \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$, ce qui est le cas par hypothèse.

D'où l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x_0^t)\,\mathrm{d}t$.

Ce théorème de changement de variable assure aussi que :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

III-3.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto x^t = \mathrm{e}^{t\ln(x)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $[0,1[$ et tend vers 0 en 0 ; de plus f est continue et croissante sur $[0,1[$, donc $t \longmapsto f(x^t)$ se prolonge en une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\forall t \in [n-1,n]$, $f(x^n) \leqslant f(x^t)$ donc en intégrant cette inégalité entre $n-1$ et n, $f(x^n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^n f(x^t)\,\mathrm{d}t$.

De même, $\forall t \in [n,n+1]$, $f(x^n) \geqslant f(x^t)$ donc en intégrant cette inégalité entre n et $n+1$, $f(x^n) \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(x^t)\,\mathrm{d}t$

III-3.3 La série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant1} \displaystyle\int_{n-1}^n f(x^t)\,\mathrm{d}t$ converge et a pour somme $G(x)$ d'après **III.3.1**.

Par comparaison, la série **à termes positifs** $\sum f(x^n)$ converge. Donc $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ existe.

De plus, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{p+1} f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{p} f(x^n) \leqslant \int_0^p f(x^t)\,\mathrm{d}t$ donc en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$:

$$\boxed{G(x) - \int_0^1 f(x^t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant G(x)}$$

III-3.4 $\dfrac{1-x}{-\ln(x)} \underset{x\to 1^-}{\to} 1$ donc d'après **III-3.1**, $(1-x)G(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$

D'autre part, comme en III-3.2, on obtient avec le changement de variable $u = x^t$ $\displaystyle\int_0^1 f(x^t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\ln(x)} \int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$

Or $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_0^x \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to 1^-}{\to} 0$, et $\dfrac{1-x}{-\ln(x)} \underset{x\to 1^-}{\to} 1$ donc $(1-x)\displaystyle\int_0^1 f(x^t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\to} 0$

III-3.2 et le *théorème de convergence par encadrement* assurent alors que

$$\boxed{(1-x)F(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

III-4.1 On pose $u_n(x) = -\ln(1-x^n)$ et on vérifie les hypothèses du *théorème de dérivation terme à terme* :

▷ Pour tout $n \geqslant 1$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $u_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1-x^n}$

▷ $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$

démonstration : si $x_0 \in]-1,1[$. $x_0^n \to 0$ donc $|u_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x_0|^n \geqslant 0$ et la série géométrique $\sum |x_0|^n$ converge

▷ $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$.

démonstration : tout segment de $]-1,1[$ étant contenu dans un segment du type $[-a,a]$ avec $a \in]0,1[$, il suffit de prouver la convergence uniforme sur de tels segments. Soit donc $a \in]0,1[$. Comme en III.2.1, il vient $\forall x \in [-a,a], |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{1-a^n} = \alpha_n$ donc $\|u_n'\|_\infty^{[-a,a]} \leqslant \alpha_n$. Or $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} na^{n-1}$ donc α_n est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$ donc la série à termes positifs $\sum \alpha_n$ converge. Ainsi la série $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[-a,a]$.

$$\boxed{F : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} -\ln(1-x^n) \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}}$$

III-4.2 La fonction $f : x \longmapsto -\ln(1-x)$ est réelle, continue, croissante sur $[0,1[$, $f(0)=0$ et $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u} = \dfrac{-\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$. Pour ce dernier point, $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u} = \dfrac{-ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0,1[$, tend vers 1 en 0 donc se prolonge par continuité en 0 et $f(1-h) \underset{h\to 0}{\sim} -\ln(h)$, donc f est intégrable au voisinage de 1.

On peut donc appliquer à f les résultats de **III-3** .

En particulier :

$$\boxed{(1-x)F(x) \underset{x\to 1^-}{\to} \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u \underset{v=1-u}{=} \int_0^1 \frac{\ln(v)}{1-v}\mathrm{d}v}$$

III-4.3 Fixons x dans $]0,1[$ et encadrons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$ par des intégrales.

Posons $\varphi(t) = \dfrac{tx^t}{1-x^t} = \dfrac{t}{\mathrm{e}^{-t\ln(x)}-1}$.

φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge par continuité en 0 (elle tend vers $-1/\ln(x)$ lorsque $t \to 0$) et est positive. $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{t\ln(x)}$ et $\ln(x) < 0$ donc $\varphi(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus, $\varphi'(t)$ a le même signe que $\mathrm{e}^{-t\ln(x)} - 1 + t\ln(x)\mathrm{e}^{-t\ln(x)}$ *i.e.* que $t\ln(x) + 1 - \mathrm{e}^{t\ln(x)}$. Or $\forall u \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$, donc $\forall t > 0, \varphi'(t) \leqslant 0$.
φ est donc décroissante et on obtient comme en III-3 :

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $a \in \{0,1\}$. Comme en III-3, le changement de variable $u = x^t$ fournit

$$\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{tx^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln^2(x)} \int_0^{x^a} \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \frac{(1-x)^2}{\ln^2(x)} \int_0^{x} \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u \leqslant (1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \leqslant \frac{(1-x)^2}{\ln^2(x)} \int_0^{1} \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u}$$

Le théorème de convergence par encadrement conclut :

$$\boxed{(1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \underset{x\to 1^-}{\to} \int_0^{1} \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u}$$

$$\boxed{(1-x)^2 F'(x) = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} = \frac{(1-x)^2}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \underset{x\to 1^-}{\to} \int_0^{1} \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u}$$

***