Centrale TSI 2012 – Math 1 – Corrigé

I -

I.A- .

I.A.1) $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[$, $\left|\dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}\right| \leqslant \mathbf{e}^{-xt}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (cours : $x > 0$) d'où la convergence de l'intégrale.

De plus, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$

I.A.2) Notons f la fonction définie par $f(x,t) = \dfrac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t}$. Beurk. Préférer : $\dfrac{\quad}{\quad} \xrightarrow[t \to 0^+]{} x-1$

$f(x,t) = \dfrac{1}{t}\Big(1 - t - (1 - xt) + \mathrm{o}\,(t)\Big) = x - 1 + \mathrm{o}\,(1)$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t} = x - 1$

I.A.3) D'après ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre et $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables.

I.B- En TSI ils n'ont pas la version "domination sur chaque $[a,b] \subset]0,+\infty[$, d'où l'énoncé en 2 temps

(!)

I.B.1) On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathbf{e}^{-xt}$;
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après **I.A.3)** et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
- HD locale : soit $[a,b] \subset]0, +\infty[$. $\forall x \in [a,b], \forall t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathbf{e}^{-at}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$

sur $[c,+\infty[$ $\left|\ \right| \leqslant e^{-ct}$

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$

On en déduit que $F(x) = \ln x + C$. On détermine C à l'aide de $F(1) = C = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

Conclusion : $F(x) = \ln x$.

I.C- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-at} - \mathbf{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \ln b - \ln a$

I.D- .

I.D.1) • La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}(1 - \mathbf{e}^{-t})^n$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;

• $\dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}(1 - \mathbf{e}^{-t})^n \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après **I.A.1)** ; ("au vois de $+\infty$")

• $\dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}(1 - \mathbf{e}^{-t})^n \underset{t\to 0}{\sim} t^{n-1}$ donc est intégrable sur $]0, 1]$ ($n \geqslant 1$). ("au vois de 0")

I.D.2) Scindons la somme dans le second membre et utilisons la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1 - \mathbf{e}^{-kt}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{e}^{-kt} = (1-1)^n - (1 - \mathbf{e}^{-t})^n$$

I.D.3) D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}(1 - \mathbf{e}^{-t})^n\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \big(F(x+k) - F(x)\big)$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k) + \ln x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k)$$

II -

II.A- .

II.A.1) La famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degrés ($\deg P_k = k$) donc libre et son cardinal, $n+1$, égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, c'en est donc une base.

II.A.2) $P_k(X+1) = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j+1) = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(X+j)$

donc $\Delta(P_k)(X) = \dfrac{1}{k!}\left[\prod_{j=1}^{k-1}(X+j+1)\right]\cdot\big((X+k)-X\big) = \dfrac{1}{(k-1)!}\prod_{k=1}^{k-1}(X+j) = \dfrac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X+j+1) = P_{k-1}(X+1)$

D'autre part, $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$.

II.A.3) Pour $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $\Delta^m(P_k) = \Delta^{m-1}\big(P_{k-1}(X+1)\big) = \cdots = P_{k-m}(X+m)$;
pour $m = k$, $\Delta^k(P_k) = P_0(X+k) = 1$;
pour $m \geqslant k+1$, $\Delta^m(P_k) = \Delta^{m-k}(P_0) = 0$
On déduit de ce qui précède que pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\Delta^n(P_k) = 0$, et comme $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \Delta^n(P) = 0$.

II.B- .

II.B.1) Suivons l'indication de l'énoncé : → Vous aurez bien entendu défini $\mathcal{P}(n)$ (qui n'est peut-être pas si clair. Est-il fixé ?!!)

- La propriété est vérifiée pour $n = 0$ (et 1) ;
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$

cette rédaction ne passerait pas

$\Delta^{n+1}(P) = \Delta^n\big(P(X+1)\big) - \Delta^n\big(P(X)\big) \overset{HR}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(-1)^{n-(k-1)}P(X+k) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-(k+1)}P(X+k) = \sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right](-1)^{n-(k+1)}P(X+k) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n-(k+1)}P(X+k)$

qui est la propriété analogue au rang $n+1$.

II.B.2) D'après **II.B.1)**, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(X+r)^k = (-1)^n\Delta^n(X^r) = 0$ d'après **II.A.4)**.

III -

III.A- Notons f_r la fonction définie par $f_r(x,t) = \dfrac{\mathbf{e}^{-xt}}{t^r}(1-\mathbf{e}^{-t})^n$

III.A.1) Comme au **I.D.1)**

III.A.2) Comme au **I.D.1)** : $f_r(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{n-r}$ donc est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $n > r-1 \iff n \geqslant r$.

III.B- .

III.B.1) Encore le théorème de dérivation sous le signe intégrale :

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f_r(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,+\infty[$ et $\dfrac{\partial f_r}{\partial x}(x,t) = -f_{r-1}(x,t)$;
- Pour tout $x \in [c,+\infty[$, $t \mapsto f_r(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après **III.A.** et $t \mapsto \dfrac{\partial f_r}{\partial x}(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$;
- HD : $\forall x \in [c,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f_r}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \left|\dfrac{\partial f_r}{\partial x}(c,t)\right| = f_{r-1}(c,t)$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $n \geqslant r \geqslant r-1$

On en déduit que F_r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,+\infty[$ et que $F_r'(x) = -\int_0^{+\infty} f_{r-1}(x,t)\,\mathrm{d}t = -F_{r-1}(x)$

III.B.2) On en déduit que F_r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{c>0}[c,+\infty[=]0,+\infty[$ et que la relation ci-dessus perdure.

III.C- .

III.C.1) Inégalité des accroissements finis ou étude de variations.) et dessin, idéalement

III.C.2) $t \mapsto f_r(x,t)$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$ donc $F_r(x) > 0$.
Pour l'autre inégalité, utiliser **III.C.1)** et effectuer le changement de variable $u = xt$.

III.C.3) Se déduit de la question précédente à l'aide du théorème des gendarmes $(n+1-r > 0)$.

III.D- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+k)^r\ln(x+k)\big) = r(x+k)^{r-1}\ln(x+k) + (x+k)^{r-1}$. Donc :

$$G_{r+1}'(x) = -G_r(x) - \frac{(-1)^r}{r!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{r-1}}_{=0 \text{ d'après l'égalité II.1}}$$

P(n)? P(1)?

III.E- • Pour $r=1$: d'après **I.D.3)**, $F_1(x)=G_1(x)$;
• Soit $1 \leqslant r \leqslant n-1$. On suppose que $F_r - G_r = 0$. Alors $(F_{r+1}-G_{r+1})' = -(F_r - G_r) = 0$ donc $F_{r+1}-G_{r+1}$ est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{r+1}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} G_{r+1}(x) = 0$, cette constante est nulle et $F_{r+1}=G_{r+1}$.

III.F- .

III.F.1) On scinde les logarithmes : $\ln(x+k) = \ln x + \ln\left(1+\dfrac{k}{x}\right)$, on scinde la somme, on factorise $\ln x$ dans la première et on utilise l'égalité II.1.

III.F.2) $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}}{j} u^j + \mathrm{o}\left(u^r\right)$.

La relation demandée s'obtient immédiatement après avoir remarqué que $(x+k)^r.\mathrm{o}\left(\left(\dfrac{k}{x}\right)^r\right) = \mathrm{o}\,(1)$

$$(x+k)^r \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j} = \frac{1}{x^r} \underbrace{(x+k)^r \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}k^j}{j} x^{r-j}}_{\text{polynôme de degré } 2r-1}$$

Ainsi, $x^r \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \sum_{j=1}^{r} \ldots$ est polynomial de degré $\leqslant 2r-1$, d'où l'existence des constantes A_s.

Mais, pour la question suivante, il y a lieu d'expliciter un peu les coefficients. Reprenons donc les calculs en développant les $(x+k)^r$ et en attachant bien sa ceinture :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i k^{r-i}\right) \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j}\right)$$

On intervertit alors les $\sum$ (finies) en faisant passer la première en dernier :

$$\cdots = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{i} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^{i-j} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{r-(i-j)}$$

\O/

Pour $0 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, on retrouve bien que $-r \leqslant i-j \leqslant r-1$ et donc l'existence des constantes A_s.

III.F.3) Dans les jolis calculs précédents, pour $0 \leqslant i-j \leqslant r-1$, on a $1 \leqslant r-(i-j) \leqslant r \leqslant n-1$ et donc la substitution $X := 0$ dans la formule II.1 assure que les coefficients $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{r-(i-j)}$ sont tous nuls. (Ouf !!)

III.F.4) Les exposants qui restent dans la somme sont tous < 0 donc $G_{r+1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(1)$

IV -

IV.A- .

IV.A.1) Pour $|a| \leqslant n-1$, le facteur $(X-a) = (X+|a|)$ figure dans la décomposition de P_n donc $P_n(a)=0$.

Pour $p = |a| \geqslant n$, $P_n(a) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (-p+j) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (p-j) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{p!}{(p-n)!} = (-1)^n \binom{p}{n}$.

IV.A.2) La somme est finie et vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (-x)^n = (1-x)^p$

IV.B- .

IV.B.1) $\left|\dfrac{P_{n+1}(a).x^{n+1}}{P_n(a).x^n}\right| = \left|\dfrac{a+n}{n+1}x\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$. Donc, avec la règle de D'ALEMBERT : si $|x|<1$, la série converge absolument et si $|x|>1$, la série diverge grossièrement.
On en déduit que $R=1$.

Mais...

IV.B.2) Avec le théorème de dérivation des séries entières, on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ S_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)P_{n+1}(a)x^n$$

Et donc $(1-x)S_a'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)P_{n+1}(a) - nP_n(a)\big)x^n$

Or $(n+1)P_{n+1} = (X+n)P_n$ donc $(n+1)P_{n+1}(a) - nP_n(a) = aP_n(a)$
de quoi l'on déduit que $(1-x)S_a'(x) = aS_a(x)$.

IV.B.3) On résout l'équation différentielle $(1-x)y' - ay = 0$ sur $]-1,1[$, intervalle où les fonction coefficients sont continues et où $(1-x)$ ne s'annule pas : le théorème de structure fournit que les solutions sont les fonctions $y = C.\exp\left(\displaystyle\int \frac{a}{1-x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{C}{(1-x)^a}$.
Pour $x = 0$, $S_a(0) = P_0(a) = 1$ donc, avec le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, $C = 1$ et $S_a(x) = \dfrac{1}{(1-x)^a}$.

IV.C- .

IV.C.1) $w_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{(n+1)^c P_{n+1}(a)}{n^c P_n(a)} = c\ln\dfrac{n+1}{n} + \ln\dfrac{a+n}{n+1} = (c-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) = \dfrac{c-1+a}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

WTF ?

On en déduit, par comparaison à l'exemple de RIEMANN, que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge $\iff c = 1-a$

Trop rapide !!! Chaque implication doit être expliquée !

IV.C.2) On télescope : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln u_n - \ln u_1$ et cette suite converge d'après ce qui précède vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Par suite, (u_n) converge vers $L = u_1 \mathrm{e}^{\ell} > 0$.
Il s'ensuit que $n^c\,|P_n(a)| \underset{n\to+\infty}{\sim} L\ (\neq 0)$ et donc que $|P_n(a)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{n^c} = \dfrac{L}{n^{1-a}}$.

IV.C.3) Par comparaison à l'exemple de RIEMANN, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |P_n(a)|$ converge $\iff 1-a>1 \iff a<0$.

Par comparaison de séries à termes ≥ 0 (ici une série de Riemann)

Alors, avec le théorème de continuité (radiale) des séries entières, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) = \lim_{x\to 1^-} S_a(x) = (1-1)^{-a} = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P_n(a) = \lim_{x\to -1^+} S_a(x) = (1-(-1))^{-a} = 2^{-a}$.

OULA ! Bizarre que ce "théorème de continuité radiale" (qui existe) soit au programme de TSI (il l'est nulle part ailleurs).

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de Mathématiques 1 de la session 2012 comportait quatre parties distinctes avec deux objectifs majeurs, *a priori* indépendants l'un de l'autre : dans la partie III, l'étude et le calcul d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre, dans la partie IV, l'étude de la convergence et le calcul de la somme d'une série entière. Les parties I et II se proposaient d'établir des résultats préliminaires utiles pour la suite.

L'ensemble est bien inscrit dans les contenus du programme du concours pour cette section et les objets qu'il y est demandé de maitriser sont usuels : intégrales généralisées, intégrales dépendant d'un paramètre et théorèmes de dérivabilité sous le signe intégral, espaces vectoriels de polynômes, bases et dimensions, séries entières, convergence et somme, principe du raisonnement par récurrence.

Le sujet était intéressant, bien pensé et bien construit en respectant une certaine progressivité dans la suite des questions posées. On pourra cependant déplorer la longueur un peu excessive de l'ensemble sans pour autant que cela ne nuise à l'esprit d'un sujet de concours.

Analyse globale des résultats

Les candidats, dans leur grande majorité, ont traité assez complètement les trois premières parties du sujet, avec cependant plus ou moins d'exactitude. La partie IV a été très rarement abordée. Les résultats sont, globalement, très moyens, plus de la moitié des copies obtiennent des résultats insuffisants, voire très insuffisants qui trahissent un manque évident de préparation à ce concours ; cependant, une cinquantaine de copies se détachent du lot, une dizaine d'entre elles pouvant être considérées de très bon, voire d'excellent niveau.

Commentaires sur les résultats et conseils aux candidats

Les réactions des candidats ou leurs carences par rapport aux grandes lignes du programme sont assez récurrentes depuis ces dernières années. Concernant l'épreuve de cette année, elles peuvent se résumer ainsi :

- l'espace vectoriel « standard » des polynômes réels de degré inférieur ou égal à un entier n est encore mal appréhendé, un nombre non négligeable de candidats n'en connait pas la dimension, ni une base canonique. Par ailleurs, les théorèmes usuels reliant famille libre, famille génératrice, dimension, sont souvent mal connus ;
- la justification de la convergence d'une intégrale généralisée, utilisant les critères usuels de comparaison ou d'équivalence, semble un peu mieux traitée que les années précédentes preuve qu'à force sans doute de pratique et de rigueur les notions les plus délicates peuvent finir par s'assimiler. Attention cependant aux notions d'équivalence de fonctions qui sont très souvent fausses ou utilisées sans aucun discernement ;
- il en est de même de l'utilisation des théorèmes de continuité et dérivation sous le signe intégral, énoncés le plus souvent de manière correcte. L'hypothèse de domination par une fonction intégrable et indépendante du paramètre est mieux comprise ;

- il est par contre difficile de se faire une opinion objective sur l'assimilation du chapitre sur les séries entières, vu le faible nombre de copies ayant abordé ce sujet. Il faut toutefois constater une fois de plus une difficulté récurrente à comprendre ce que signifie la convergence d'une série, le lien entre suite et série, et la relation avec sa somme ;

- enfin, le raisonnement par récurrence est soit mal perçu, soit souvent utilisé de manière excessive sans aucune pertinence.

Il faut souligner enfin le manque de soin apporté à la rédaction, qui est, la plupart du temps, approximative, voire dans certains cas inexistante, le candidat laissant le soin au correcteur de « deviner » ce qui est dit. Les abréviations et les sigles « personnels » sont fréquents et la plupart du temps inexpliqués ! Un tel comportement est inacceptable et risqué. La présentation doit aussi être améliorée car elle constitue un élément d'appréciation non négligeable.

Conclusions

En conclusion, s'il faut encore constater cette année une certaine carence dans l'acquisition et la bonne utilisation des connaissances de base du cours de Mathématiques des classes préparatoires, force est de constater que certains candidats, une cinquantaine environ, ont mieux su tirer parti d'une préparation sans doute plus accomplie durant leur année Le sujet intéressant et bien construit permettait en effet à des candidats bien préparés de répondre à une grande partie des questions posées. Il n'en reste pas moins vrai que la grande majorité des copies trahissent encore des difficultés à utiliser les objets et les résultats les plus usuels du cours, sans doute par manque d'entrainement et manque d'exercices d'applications. Il est impératif que cette tendance soit rapidement et durablement inversée.