CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

Exercice 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{2x^n}{n^2-1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. On note S la fonction somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R, R[$.

3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E)\quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Problème

Autour de la transformation de Laplace

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E, on appelle transformée de Laplace de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère les propositions suivantes :

(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;

(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

(a) f est positive sur $[a, +\infty[$;

(b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. **(a)** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

(b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. **(a)** On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

(b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

5. Transformée de Laplace d'une dérivée
Soit f dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \ .$$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question **4**.

(b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E.

7. On suppose dans cette question que f est dans F.

(a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

(b) *Théorème de la valeur initiale*
On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. Théorème de la valeur finale
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

(a) Démontrer que f appartient à F.

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x) \, \mathrm{d}x$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

(d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

(a) Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

(b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)| \, \mathrm{d}t + \varepsilon$$

(c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

(a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

(b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t) \, \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{1 + x^2} \left(\mathrm{e}^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1 \right) .$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t) \, \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t) \, \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$.

(d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) :

Lorsque f dans E vérifie $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question **9**, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé