Espaces préhilbertiens

1 Espaces préhilbertiens

1.1 Produits scalaires, orthogonalité

Exercice 1 – *Un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$ *[3/10]*
Montrer que $(P,Q) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}$ constitue un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 – *Centrale 2007 [3/10]*
Soient E un espace euclidien, et A un sous-espace de E. Montrer : $A \oplus A^{\perp} = E$, et $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

Exercice 3 – *Mines 2009 [5/10]*
Pour $P, Q \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

1. Montrer qu'on a bien défini un produit scalaire sur E.
2. La base canonique de E est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?
3. On fixe $A \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ non constant et on définit, pour $P \in E$, $R_A(P)$ comme le reste dans la division euclidienne de P par A.
   (a) R_A est-elle un projecteur ? Déterminer son image et son noyau.
   (b) R_A est-elle un projecteur orthogonal ?

Exercice 4 – *IMT 2016 [3/10]*
On définit, pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_2[X]$:

$$\langle P|Q\rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire.
2. Exhiber une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E.

Exercice 5 – *ENSEA 2016 [8/10]*
On définit, pour $f, g \in E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$: $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire.
2. Montrer que
$$H_1 = \{f \in E;\ f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{f \in E;\ f'' = f\}$$
   constituent deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux (pour φ).

Exercice 6 – *Décomposition OT ; aka QR [7/10]*

1. Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ trois bases d'un même espace E. Exprimer $\underset{\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_3}{\mathrm{Pas}}$ à l'aide de $\underset{\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2}{\mathrm{Pas}}$ et $\underset{\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3}{\mathrm{Pas}}$.
2. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $P = OT$.

3. Exemples : $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ puis $P = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 25 & -22 \\ -4 & -8 & -7 \\ 1 & 11 & -14 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 – *Centrale 2010 [7/10]*
Soient E euclidien de dimension n, $\alpha \in]0, \pi[$, et $n+1$ vecteurs $u_0, u_1, ..., u_n$ faisant deux-à-deux l'angle α.

1. Déterminer α pour $n = 2$.
2. Déterminer α dans le cas général et calculer $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$.
3. Montrer l'existence d'un tel α et d'une telle famille.

Exercice 8 – *TPE [5/10]*
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $f(t) = \begin{cases} t \ln t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
Minimiser $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - (at+b))^2 \, dt$ lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$.

1.2 Quelques calculs

Exercice 9 – *CCINP 2022 [5/10] - Hugo D.*
Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on définit $\langle P|Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire.
2. Orthonormaliser la base canonique.
3. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le noyau de $Q \mapsto Q'(0)$.

Exercice 10 – *Une orthonormalisation [3/10]*
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, orthonormaliser la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, avec $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,1)$ et $f_3 = (1,0,0)$.

Exercice 11 – *Une réflexion dans $\mathbb{R}^4$ [4/10]*
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la réflexion par rapport à l'hyperplan $H = \operatorname{Ker} \varphi$, où $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_3$.
Trace de la matrice obtenue ?

Exercice 12 – *Une symétrie dans $\mathbb{R}^4$ [7/10]*
E désigne $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle. F désigne l'ensemble des quadruplets de réels (a,b,c,d) tels que $a+b+c+d = 0$ et $a+2b+3c+4d = 0$. Vérifier que F est un sous-espace de E ; déterminer sa dimension, une base orthogonale de F et de $F^\perp$, et enfin, donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F.

1.3 Polynômes orthogonaux

Exercice 13 – *Polynômes de Tchebychev de seconde espèce [8/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour :
$$\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}dt.$$
2. Montrer que les polynômes de Tchebychev de seconde espèce ($\sin\theta \; U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta)$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

3. Déterminer les racines de U_n.

Exercice 14 – *Polynômes de Laguerre [8/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour :

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt.$$

2. Montrer que les polynômes de Laguerre ($L_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{n!}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)^{(n)}$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. En dehors de toutes considérations d'orthogonalité, montrer que L_n possède n racines simples réelles.

Exercice 15 – *Des résultats généraux [9/10]*

Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, ainsi que $w \in \mathcal{L}^1(]0,1[)$ (w pour poids...). On définit alors :

$$\forall f, g \in E, \qquad \langle f|g\rangle = \int_{]0,1[} fgw.$$

1. Montrer que cette intégrale a bien un sens... et qu'on a ainsi défini un produit scalaire sur E.
2. Montrer l'existence d'une famille orthonormée de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.
3. Soit $f \in E$. Montrer que $\sum\langle f|P_n\rangle^2$ est convergente, et donner la valeur de la somme à l'aide de f. *On admettra qu'il existe une suite (Q_n) de polynômes tels que $\|Q_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

1.4 Divers

Exercice 16 – *Navale 2016 [7/10]*

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On considère H l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Montrer que H est stable par u si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M^{T}.

Exercice 17 – *Centrale 2016 [8/10]*

Soit E un espace euclidien de dimension n. On considère deux familles de n vecteurs $\mathcal{X} = (x_1, ..., x_n)$ et $\mathcal{Y} = (y_1, ..., y_n)$ telles que pour tout (i,j), $\langle x_i|x_j\rangle = \langle y_i|y_j\rangle$.

1. Pour $n = 2$, montrer que si $\mathcal{X}$ est libre, alors $\mathcal{Y}$ aussi.
2. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal ψ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\psi(x_i) = y_i$.

2 Isométries vectorielles, matrices orthogonales

2.1 Généralités

Exercice 18 – *CCP 2009 (MP) [7/10]*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\left|\sum_{i,j} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}.$$

Exercice 19 – *ENSAM 2015 [5/10]*
Soit $f \in O(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie ($\geqslant 2$). On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.
2. Pour $x \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$, calculer $g_n(x)$.
3. Même chose pour $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.
4. Calculer $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$.

Exercice 20 – *CCP 2015 [6/10]*
Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension n.

1. Montrer que $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle v(e_i)|e_i\rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ choisie.
2. Montrer que $T = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \langle v(e_j)|f_i\rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ choisies. Donner la valeur de T lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.

2.2 En dimension 3

Exercice 21 – *Une rotation [6/10]*
Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_3$ (resp. $e_1 - e_3$) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (resp. $\dfrac{\pi}{3}$).

Exercice 22 – *Automorphismes à identifier [8/10]*
Donner la nature précise des endomorphismes de E dont les matrices dans une base orthonormée est :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

(la dernière est hors programme, optionnelle).

Exercice 23 – *Matrices antisymétriques [6/10]*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$: montrer qu'il y a équivalence entre :

1. Il existe $x_0 \in E$ tel que u est l'application $x \mapsto x_0 \wedge x$.
2. Il existe une b.o.n.d. dans laquelle la matrice M de u est antisymétique (i.e. : $M^{\mathrm{T}} = -M$).
3. Dans toute b.o.n.d., la matrice de u est antisymétique.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, que dire de la matrice de u dans une base orthonormée qui n'est pas directe ?

Exercice 24 – *Mines 2010 [6/10]*
Soient E un euclidien de dimension 3, r une rotation et s une symétrie orthogonale. Reconnaître $s \circ r \circ s$.

Exercice 25 – *Mines (MP) 2009 [8/10]*
Soit $p, q, r \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux. Montrer :

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R}) \iff p^3 - p^2 = q^3 - q^2 = r^3 - r^2.$$

Trouver alors l'axe et l'angle de cette rotation.
Indication : *Considérer* $(X-p)(X-q)(X-r)$.

Exercice 26 – *Mines 2009 [4/10]*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$, $f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i}$. Caractériser géométriquement f.

3 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 27 – *ENSAM 2016 [6/10]*
Soit p un projecteur, l'espace ambiant E étant euclidien.

1. Diagonaliser p.
2. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   — p est un projecteur orthogonal ;
   — p est auto-adjoint ;
   — pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 28 – *Un autre classique [8/10]*
Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure, lorsuqe (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, du rapport :

$$\frac{x^2+y^2-z^2+2xz+2yz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Indication : c'est peut-être de la forme $\dfrac{X^{\mathrm{T}}AX}{X^{\mathrm{T}}A}$, *ou encore* $\dfrac{\langle u(x)|x\rangle}{\|x\|^2}\cdots$

Exercice 29 – *CCP 2016 [7/10]*
Soit $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{\mathrm{T}}M = MM^{\mathrm{T}}$ et $M^2 = -I_n$. Montrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 30 – *CCP 2016 [4/10]*
Ortho-diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 31 – *ENSEA 2009 (MP) [5/10]*
Trouver les $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$.

Exercice 32 – *Mines 2010 [7/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer : $1 + (\det A)^{1/n} \leqslant (\det(I_n + A))^{1/n}$.

Exercice 33 – *Matrice de Hilbert [8/10]*
Montrer que la matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j}$ est (symétrique) définie positive.
Indication : *Que vaut* $\displaystyle\int_0^1 x^{i-1/2}x^{j-1/2}dx$ *?*

Exercice 34 – *TPE 2012 (MP) [8/10]*
Peut-on trouver B non symétrique telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

Exercice 35 – *CCP 2012 (MP) ; difficile sans indications ! [9/10]*

1. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors M est inversible.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit $M_0 = I_n$, puis, pour $p \in \mathbb{N}$: $M_{p+1} = \dfrac{1}{2}(M_p + AM_p^{-1})$.
   (a) Montrer que les M_p sont dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. *On note L la limite.*
   (c) Trouver une relation entre A et L.

Exercice 36 – *CCP 2013 [8/10]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$.

1. Montrer :
$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(e_k) | e_k \rangle$$
2. On suppose f auto-adjoint, avec $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer :
$$\forall x \in E, \qquad \langle f(x) | x \rangle \geqslant 0$$
3. Montrer que si u et v sont deux endomorphismes auto-adjoints à valeurs propres positives, alors :
$$0 \leqslant \mathrm{tr}(u \circ v) \leqslant \mathrm{tr}(u)\mathrm{tr}(v)$$

Exercice 37 – *CCP 2010, 2015 [6/10]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MM^{\mathrm{T}}M = I_n$. Montrer que M est inversible et symétrique. Déterminer M.

Exercice 38 – *CCP 2016 [4/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$. Montrer : $A^2 = I_n$.

Exercice 39 – *TPE 2016 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
— A est symétrique réelle à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.
— Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^{\mathrm{T}}M$.

Exercice 40 – *Mines 2015 [8/10]*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose le système $AX = B$ incompatible, et on cherche à minimiser $\|AX_0 - B\|$ (norme euclidienne).

1. Est-ce que X_0 existe ? Est-il unique ? Exprimer AX_0 à l'aide d'une projection.
2. Exprimer $\mathrm{Ker}\,(A^{\mathrm{T}}A)$ en fonction de $\mathrm{Ker}\,(A)$. De même, que dire de $\mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}}A)$ et $\mathrm{rg}(A)$?
3. Montrer que $\|AX_0 - B\|$ est minimale si et seulement si $A^{\mathrm{T}}AX_0 = A^{\mathrm{T}}B$.

Exercice 41 – *IMT 2015 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que $\dfrac{\mathrm{tr}^2(A)}{\mathrm{tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

4 Indications, solutions partielles

Exercice 1 – Penser à prouver que cette série est bien convergente, tout de même !

Exercice 2 – C'est du cours.

Exercice 3 – $R_A \circ R_A = ?$

Exercice 4 – Attention, il n'est pas utile de normaliser les P_k... mais quand on les calcule, il faut normaliser les précédents ! Par exemple, $P_0 = 1$ vérifie $\|P_0\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$...

Exercice 5 – Intégrer par parties $\int_0^1 f'g'$ (pour le caractère orthogonal de la somme). Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, la fin de l'analyse me conduit à utiliser le cours sur les équations différentielles linéaires...

Exercice 6 – C'est du cours... et les exemples ont été construits (comment, à votre avis ?) pour que les calculs soient raisonnables !

Exercice 7 – [À reprendre] Les produits scalaires et la norme donnent un système de solutions $(\lambda, \cos\alpha) = (1/n, 1)$ et $(-1, -1/n)$ et le reste tombe facilement. Pour l'existence, parapluie qui s'ouvre dans la tempête et TVI.

Exercice 8 – Géométrisation standard ; on trouvera $\dfrac{1}{108}\cdot$ Allez, cadeau : $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln t dt = -\frac{1}{(k+1)^2}\cdot$

Exercice 9 – Il s'agit de projeter orthogonalement sur $H = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Déjà, l'image de ces deux vecteurs n'est pas très compliquée à calculer ! Il reste à calculer $p(X) = a + bX^2$, sachant que $X - p(X)$ est orthogonal à 1 et à X^2, ce qui donne deux conditions. On peut écrire les équtions en question... avant de réaliser que X est orthogonal à la fois à 1 et à X^2, donc...

Exercice 10 – À la fin, merci de vérifier que votre base est bien orthonormée...

Exercice 11 – Après un dessin, $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x|n\rangle}{\|n\|^2}n$... et on vérifie que la trace vaut bien $3 - 1 = 2$.

Exercice 12 – On trouvera $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, qui a la trace attendue.

Exercice 13 – Changement de variable $t = \cos\theta$; racines : les $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 14 – IPP, Rolle généralisé, ordre de multiplicité, récurrence.

Exercice 15 – Pour l'intégrabilité, fg est borné (on travaille sur $]0,1[\subset [0,1]$), donc $fgw = O(w)$. Ensuite, j'écrirais bien $f = \pi_n(f) + (f - \pi_n(f))$ avec π_n la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$ avant de Pythagoriser. Si on note n_N le degré de Q_N, alors :

$$\|f - \pi_{n_N}(f)\|_2 \leqslant \|f - Q_N\|_2 \leqslant \|f - Q_N\|_\infty$$

On trouve finalement $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \langle f|P_n\rangle^2 = \|f\|^2$.

Exercice 16 – Notons A le vecteur (colonne) en jeu. Sous l'hypothèse $M^{\mathrm{T}}A = \lambda A$, il est aisé de voir que « $A^{\mathrm{T}}X = 0$ implique $A^{\mathrm{T}}(MX) = 0$ », soit encore : H est stable par u. Réciproquement, si H est stable par u, alors $A^{\mathrm{T}}HX$ est nul pour tout X de H, donc $X^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}A)$ également, donc $H^{\mathrm{T}}A$ est orthogonal à H, donc est dans $H^\perp = \mathrm{Vect}(A)$!

Exercice 17 – Pour le début on raisonne par la contraposée en supposant que y_1 est combinaison linéaire de $y_2, ..., y_n$: $y_1 - \sum \alpha_i y_j$ est nul donc orthogonal à chaque y_i ; il en va alors de même pour $x_1 - \sum \alpha_j x_j$. Ensuite, on extrait une famille libre maximale des (x_i). La sous-famille correspondante des (y_i) sera également libre maximale. On complète ces deux familles en deux bases (pas complètement n'importe comment ; cf plus tard), on considère l'endomorphisme envoyant la première sur la deuxième... et yapluka montrer que c'est un endomorphisme orthogonal d'une part, et qu'il envoie bien les x_i sur les y_i, y compris ceux qu'on avait laissé sur le bord de la route !

Exercice 18 – Cauchy-Schwarz entre $v = e_1 + \cdots + e_n$ et $u(v)$ à gauche. À droite : sommer n inégalités de Cauchy-Schwarz. Au milieu : $(|a| + |b|)^2 \geqslant a^2 + b^2$!
Au fait, quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 19 – Orthogonalité et dimensions. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplement) vers la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 20 – S est la trace de v. Pour T, il s'agit de montrer que $\sum\limits_{j=1}^{n} \|v(e_j)\|^2$ est indépendant de $\mathcal{E}$. Mais si V représente v dans $\mathcal{E}$, alors $\sum\limits_{j=1}^{n} \|v(e_j)\|^2 = \mathrm{tr}(V^{\mathrm{T}}V)$, quantité qui ne doit pas changer si on change V par $V' = P^{-1}VP$, avec P orthogonale.

Exercice 21 – Au choix, $r(x) = \ldots$ ou bien passer par une (autre) base orthonormée puis revenir à la canonique. Vérifier la trace à la fin, ainsi que le caractère orthogonal.

Exercice 22 – Deux rotations (dont on commence par déterminer l'axe, qu'on oriente, puis on détermine l'angle...) ; une réflexion (dont on déterminera les directions propres) et enfin une composée commutative rotation/réflexion.

Exercice 23 – Travailler en base adaptée

Exercice 24 – C'est de déterminant 1. Quels sont les vecteurs fixes ?

Exercice 25 – Classique (sans être facile)... Relations coefficients/racines ; conditions d'orthogonalité $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{i,j}$, déterminant, et brassage d'air algébrique. Équivalences « déconseillées ». Dans le sens direct, on montre que $(X-p)(X-q)(X-r) = X^3 - X^2 + pqr$. Pour la réciproque, on considère $X^3 - X^2 - A$ où $A = p^3 - p^2 = \ldots$: ce polynôme admet p q et r comme racine ce qui nous donne de bonnes informations...

Exercice 26 – Je parierais sur une rotation d'angle $2\pi/3$...

Exercice 27 – Le premier point implique évidemment les deux autres. Le deuxième aussi, si on commence par réduire p en base orthonormée. Enfin, on montre de façon classique (mais non évidente) que le troisième point implique le premier : pour x et y dans les deux sous-espaces propres de p, on écrit $\|p(\lambda x + y)\|^2 \leqslant \|\lambda x + y\|^2$; etc.

Exercice 28 – On sait que le rapport en question est compris entre les deux valeurs propres extrémales de la matrice symétrique (l'endomorphisme autoadjoint) en question, et que ces valeurs sont atteintes en considérant des vecteurs propres associés...

Exercice 29 – $S = M^{\mathrm{T}}M$ est une symétrie (son carré vaut I_n) ; c'est même une symétrie orthogonale. Mais $X^{\mathrm{T}}SX = \cdots \geqslant 0$, donc $\mathrm{Ker}\,(S+I)$ est réduit à $\{0\}$.

Exercice 30 – On a déjà rencontré $A + 2I$ une ou deux (centaines de) fois : ses valeurs propres sont 0 (double) et 3 ; celles de A sont donc -2 (double) et 1. Je commencerais par prendre un vecteur normé de $\mathrm{Ker}\,(A - I)$; tout vecteur orthogonal sera dans $\mathrm{Ker}\,(A + 2I)$; en le normant puis avec un produit vectoriel, c'est terminé. Ha oui au fait : un dessin avec un plan et une droite orthogonale pourrait aider...

Exercice 31 – $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$, donc les valeurs propres possibles pour cette matrice symétrique réelle sont limitées...

Exercice 32 – Je me ramène déjà au cas où A est diagonale. Il s'agit alors de montrer quelque chose comme $1 + \lambda_1^{1/n} \ldots \lambda_n^{1/n} \leqslant (1+\lambda_1)^{1/n} \ldots (1+\lambda_n)^{1/n}$
Le considérerais alors bien l'application $\varphi : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$: une éventuelle convexité pourrait apporter quelque chose.

Exercice 33 – Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$, la famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$, avec $f_i(x) = x^{i-1/2}$, est libre. La matrice de Hilbert H représente alors le produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, donc est (symétrique) définie positive (puisque ${}^tXHX = \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|^2 \ldots$).

Exercice 34 – Notons A la matrice du membre de droite. La matrice de petit rang $(A-I_3)/5$ a déjà été réduite n fois : ses valeurs propres sont 0 (double) et 3 ; A est donc semblable puis ortho-semblable à $\mathrm{Diag}(16,1,1)$. Peut-on trouver une matrice non symétrique dont le carré vaut cette matrice diagonale ? Je pense que oui : prendre $\begin{pmatrix}1 & 999\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ pour commencer... La fin est laissée au lecteur.

Exercice 35 – Après orthodiagonalisation, on est essentiellement ramené à l'étude des suites réelles définies par leur premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n+d/u_n)/2$ avec $d>0$: une telle suite est réputée[1] converger vers $\sqrt{d}$. Finalement, $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une (puis LA) matrice symétrique réelle positive de carré M.

Exercice 36 – Écrire $f(e_k)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_{i,k}e_i$ avec $M=\mathrm{Mat}(f,\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est orthonormée ; puis cogner contre e_k. Pour le deuxième point, décomposer x dans une base orthonormée de diagonalisation. Enfin, travailler dans une base orthonormée de diagonalisation de u (par exemple). Les matrices de u et v y sont respectivement diagonale et symétrique ; etc. Attention, la dernière inégalité est plus niaise/bizarre que fine !

Exercice 37 – Pour le caractère symétrique, écrire $M=M^{-1}\left(M^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$. Ensuite, on a $M^3=1$ avec M symétrique réelle, donc M est diagonalisable, avec 1 comme seule valeur propre...

Exercice 38 – Après une orthodiagonalisation, ça doit tomber vite (les valeurs propres sont réelles et racines de l'unité...)

Exercice 39 – Pour le sens direct, et si X est un vecteur propre, $X^{\mathrm{T}}AX$ nous donnera la positivité des valeurs propres. Pour la réciproque, orthodiagonalise A, écrire la matrice diagonale comme le carré d'une autre ; etc.

Exercice 40 – Faire un dessin ! AX décrit un sous-espace de $\mathbb{R}^p$ auquel B n'appartient pas. La norme de AX_0-B est minimale si et seulement si AX_0-B est orthogonal à $\mathrm{Im}\,(A)$ (Pythagore...). Mais ceci s'exprime également sous la forme : pour tout X, $\langle AX_0-B|AX\rangle=0$, ou encore : $\langle A^{\mathrm{T}}(AX_0-B)|X\rangle=0$. Ceci étant vrai pour tout X, ça l'est en particulier pour $X=A^{\mathrm{T}}(AX_0-B)$...
Pour les histoires de noyaux, une inclusion est évidente, et il y a en fait égalité (si $A^{\mathrm{T}}AX=0$, alors en multipliant à gauche par X^{T}... et le théorème du rang permet de prouver (en utilisant l'inclusion triviale des images) : $\mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{rg}(A)(=\mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}}))$.
Au fait, vous savez toujours montrer qu'une matrice et sa transposée ont toujours le même rang ?

Exercice 41 – Les trois quantités sont des invariants de similitudes : elles ne dépendent que de l'endomorphisme canoniquement associé... qu'on préférera regarder dans une base orthonormée de diagonalisation. Il s'agit alors de montrer : $\left(\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\right)^2\leqslant r\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i^2$. Vous ne reniflez pas du Cauchy-Schwarz ?

1. C'est la méthode de Newton appliquée à $t\mapsto t^2-d$, accessoirement !