Khôlles : quinzaine numéro 8

Du 3 au 14 février 2025

1 Première semaine : probabilités, espaces préhilbertiens (début)

— Toutes les probabilités, avec en particulier l'espérance, la variance, Bienaymé-Tchebichev et la loi faible des grands nombres, l'utilisation des fonctions génératrices.
— Espaces euclidiens : le cadre, Cauchy-Schwarz, utilisation de l'orthogonalité, en particulier pour déterminer la borne inférieure de la distance entre un vecteur fixe et ceux d'un sous-espace de dimension finie : ce point doit faire l'objet d'une géométrisation autonome et d'un dessin.
— Existence de bases orthonormées en dimension finie (par récurrence, et par Gram-Schmidt).

2 Deuxième semaine : espaces préhilbertiens (début)

Tout exercice de probabilité reste le bienvenu. Idéalement (mais bon...) la fin des espaces préhilbertiens :
— Matrice d'un produit scalaire ; changement de base ; matrices orthogonales ; décomposition QR (en exercice).
— Automorphismes orthogonaux ; lien avec les matrices orthogonales. Habitants de $SO_2(\mathbb{R})$ puis $SO(E)$ puis $O(E)$ en dimension 2. Habitants de $SO(E)$ en dimension 3. Identification précise des rotations en dimension 3.
— Endomorphismes autoadjoints : théorème spectral sans E à la fin (géométrique et matriciel). Endomorphismes et matrices symétriques (défini(e)s) positif(ve)s (à partir du mardi 5).
— Applications (aucune explicitement au programme) telle que l'étude des extrémas de $\dfrac{\langle u(x)|x\rangle}{\|x\|^2}$.
— Endomorphismes symétriques (définis). Le fait essentiel à savoir prouver est l'équivalence entre le fait que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et le fait que $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ (et variantes strictes et matricielles).

3 Questions de cours

— [S1] Markov et Bienaymé-Tchebichev.
— [S1] Inégalité de Cauchy-Schwarz ; cas d'égalité.
— [S1] $X^\perp$ est un sous-espace ; $F \cap F^\perp = \{0\}$; $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.
— [S1+S2] Existence d'une base orthonormée en dimension finie. Par récurrence (soigneuse) ou par orthonormalisation.
— [S1+S2] Si F est un sous-espace de dimension finie de E et $x \in E$, alors lorsque f décrit F, $\|x - f\|$ possède un minimum, atteint en le projeté orthogonal de x sur F.
— [S2] Si F est un sous-espace de dimension finie de E, alors $E = F \oplus F^\perp$.
— [S2] Un endomorphisme d'un espace préhibertien préserve la norme si et seulement s'il préserve le produit scalaire.
— [S2] Si u est symétrique et possède pour valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ alors pour tout $x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$.

4 Coming next

Prochaine quinzaine (qui commence le 10 mars : pas de kholles la semaine avant les vacances) : préhilbertiens, équations différentielles linéaires.