CCP PSI 2019 - Un corrigé

PROBLÈME 1

Partie I - Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

Q1. On note $u : (x,t) \mapsto e^{-t(1-itx)}$ (on va l'utiliser à plusieurs reprises). Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
$t \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (il n'y a donc pas de problème d'existence de l'intégrale en 0) et pour tout $t \geq 0$, $|u(x,t)| = |e^{-t(1-itx)}| = |e^{-t}e^{it^2x}| = e^{-t}$ de sorte que par limite usuelle, $t^2u(x,t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ donc $u(x,t) = o(1/t^2)$ quand $t \to +\infty$. Comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$), $t \mapsto u(x,t)$ aussi donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)dt$ existe i.e. $f(x)$ existe. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

Q2. ▶ Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, $t \mapsto t^pe^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $\boxed{\Gamma_p \text{ existe}}$.

▶ On réalise sur Γ_p une intégration par parties en posant

$$u'(t) = t^p \quad u(t) = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$$
$$v(t) = e^{-t} \qquad v'(t) = -e^{-t}$$

u et v sont bien de classe C^1, $u'v$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $[uv]_0^{+\infty} = 0$ puisque $u(0) = 0$ $(p+1 > 0)$ et $uv \to 0$ en $+\infty$ par limite usuelle. Ainsi,

$$\Gamma_p = \frac{1}{p+1}\int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-t}dt = \frac{1}{p+1}\Gamma_{p+1} \text{ donc } \boxed{\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p}$$

Q3. $\Gamma_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ puis, avec la relation précédente, on a facilement par récurrence (ou produit télescopique) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{\Gamma_p = p!}$.

Q4. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel et $p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,t) = (it^2)^p u(x,t)$ (c'est immédiat par récurrence mais on va le prouver dans ce qui suit).

On montre alors par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{H(p) : \ll f \text{ est } p \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \text{ réel, } f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (it^2)^p u(x,t)dt \gg}$$

▶ **Initialisation** : pour $p = 0$, on doit montrer que pour tout x réel, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)dt$ ce qui n'est rien d'autre que la définition de f.

▶ **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $H(p)$ est vraie. Montrons que $H(p+1)$ l'est aussi. On sait donc que f est p fois dérivable et pour tout x réel, $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (it^2)^p u(x,t)dt$.

On note $\theta : (x,t) \mapsto (it^2)^p u(x,t)$. Alors,

— Pour tout x réel, $t \mapsto \theta(x,t)$ est continue (clair) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque pour $t \geq 0$, $|\theta(x,t)| = t^{2p}e^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (voir **Q2**).

— Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \theta(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,t) = (it^2)^{p+1}u(x,t)$.

— Pour tout x réel, $t \mapsto \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (clair).

— Pour tous x réel et $t \geq 0$, $\left|\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x,t)\right| = \left|(it^2)^{p+1}u(x,t)\right| = t^{2p+2}e^{-t}$ (voir **Q1**) qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (voir **Q2**).

Par le théorème sur la classe C^1 des intégrales à paramètre, $f^{(p)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ i.e. f est de classe C^{p+1} donc f est $p+1$ fois dérivable et pour tout x réel,

$$f^{(p+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (it^2)^{p+1}u(x,t)dt = i^{p+1}\int_0^{+\infty} t^{2p+2}e^{-t(1-itx)}dt$$

donc $H(p+1)$ est vraie. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ et pour tous } p \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(x) = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t(1-itx)}dt}$$

Remarques : j'ai choisi ici de faire une récurrence et de ne pas utiliser le théorème (pénible) sur la classe C^∞ des intégrales à paramètre afin de n'utiliser que le théorème de classe C^1. Par ailleurs, j'ai pris comme hypothèse la dérivabilité p fois plutôt que la classe C^p pour éviter, dans l'initialisation, de montrer la continuité de f (ce qui demanderait de faire deux fois le même travail).

Q5. On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{f^{(p)}(0)} = i^p \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}dt = i^p\Gamma_{2p} = \boxed{i^p(2p)!}$ (voir **Q3**).

▶ Montrons que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est nul.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $u_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p = i^p\dfrac{(2p)!}{p!}x^p$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$, $u_p \neq 0$ (car $x \neq 0$) et

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| = \left|\frac{i^{p+1}\frac{(2p+2)!}{(p+1)!}x^{p+1}}{i^p\frac{(2p)!}{p!}x^p}\right| = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1}|x| \to +\infty \text{ quand } p \to +\infty \text{ (car } |x| > 0)$$

D'après le critère de d'Alembert sur les séries numériques, la série $\sum u_p$ diverge donc la série $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ diverge. Ceci étant valable pour tout réel x non nul, on a bien montré que

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p \text{ est nul}}$$

▶ Montrons que la fonction f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Supposons le contraire. Il existe alors $r > 0$ et une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$.

On sait alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ de sorte que $\sum_{p\geq 0} \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$ converge pour tout $x \in]-r, r[$ ce qui est absurde d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas développable en série entière au voisinage de } 0}$$

Q6. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k : x \mapsto e^{-k(1-ikx)} = e^{-k}e^{ik^2x}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, $|u_k(x)| = e^{-k} = o(1/k^2)$ donc la série $\sum u_k(x)$ converge absolument donc converge donc $g(x)$ existe. Ainsi, $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k est de classe C^∞ et pour tous $p \in \mathbb{N}$ et x réel, $u_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2x}$ (récurrence facile mais on va le voir dans ce qui suit).

On montre alors par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{H(p) : \ll g \text{ est } p \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \text{ réel, } g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2x} \gg}$$

▶ **Initialisation** : pour $p = 0$, on doit montrer que pour tout x réel, $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$ ce qui n'est rien d'autre que la définition de g.

▶ **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $H(p)$ est vraie. Montrons que $H(p+1)$ l'est aussi. On sait donc que g est p fois dérivable et pour tout x réel, $g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2x}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k : x \mapsto (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2x}$. Alors,
— $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge simplement vers $g^{(p)}$ sur $\mathbb{R}$ d'après $H(p)$.
— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, v_k est de classe C^1 (clair) et pour tout x réel, $v_k'(x) = (ik^2)^{p+1} e^{-k} e^{ik^2x}$.
— $\sum v_k'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $k \in \mathbb{N}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $|v_k'(x)| = k^{2p+2}e^{-k}$ qui ne dépend pas de x donc $\|v_k'\|_{\infty,\mathbb{R}} = k^{2p+2}e^{-k}$ qui est le terme général d'une série convergente puisque négligeable devant $1/k^2$ comme avant.

Ainsi, par le théorème de classe C^1 des sommes de séries de fonctions, $g^{(p)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ i.e. g est de classe C^{p+1} donc $p+1$ fois dérivable et pour tout x réel,

$$g^{(p+1)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (ik^2)^{p+1} e^{-k} e^{ik^2x}$$

donc $H(p+1)$ est vraie. Ainsi,

$$\boxed{g \text{ est } C^\infty \text{ et pour tous } p\in\mathbb{N} \text{ et } x\in\mathbb{R},\ g^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(ik^2)^p e^{-k}e^{ik^2x}}$$

Q7. Soit $p\in\mathbb{N}$. D'après ce qui précède,

$$\left|g^{(p)}(0)\right| = \left|i^p\sum_{k=0}^{+\infty}k^{2p}e^{-k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}k^{2p}e^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty}k^{2p}e^{-k}$$

puisque tous les termes de la somme sont positifs. Justement, puisqu'ils sont tous positifs, la somme est plus grande que chaque terme donc que le terme correspondant à $k=p$ par exemple. Ainsi,

$$\boxed{|g^{(p)}(0)|\geq p^{2p}e^{-p}}$$

Q8. ▶ Montrons que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est nul.

Soit $x\neq 0$. Alors, d'après la question précédente, pour $p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p\right| \geq |x|^p\frac{p^{2^p}e^{-p}}{p!}$. On pose $\displaystyle\alpha_p=|x|^p\frac{p^{2^p}e^{-p}}{p!}$. α_p est non nul et

$$\left|\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}\right| = \frac{|x|}{e}\frac{(p+1)^{2p+1}}{p^{2p}} = \frac{|x|}{e}(p+1)\frac{(p+1)^{2p}}{p^{2p}} = \frac{|x|}{e}(p+1)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}$$

Mais $\displaystyle\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}=e^{2p\ln(1+1/p)}$ et $\ln(1+1/p)\sim 1/p$ donc $2p\ln(1+1/p)\sim 2$ donc $2p\ln(1+1/p)\to 2$ donc $e^{2p\ln(1+1/p)}\to e^2$ (exp est continue) donc $\displaystyle\left|\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}\right|\to+\infty$ $(2|x|/e>0)$ donc, par le critère de d'Alembert sur les séries numériques, $\sum\alpha_p$ diverge.

Rappelons que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p\right|\geq\alpha_p\geq 0$. Comme $\sum\alpha_p$ diverge, $\displaystyle\sum\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p\right|$ diverge (attention, la positivité est essentielle).

Si le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ était non nul, en le notant R on aurait : $\forall x\in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ converge absolument (il y a convergence absolue à l'intérieur de l'intervalle de convergence) ce qui est absurde d'après ce que l'on vient de montrer. Ainsi,

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum_{p\geq 0}\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p \text{ est nul}}$$

▶ On obtient alors comme dans **Q5** que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est pas développable en série entière au voisinage de } 0}$$

Partie II - Le théorème de Borel

Q9. $a = \dfrac{1}{2i}$ et $b = -\dfrac{1}{2i}$ conviennent : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \frac{1/2i}{x-i} - \frac{1/2i}{x+i}}$$

Q10. Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque x est réel et ne prend donc jamais la valeur i. Elle est C^∞ comme inverse d'une fonction C^∞ ne s'annulant pas.

On montre alors par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$H(p) :\ll\ \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}}\ \gg$$

▶ **Initialisation** : pour $p = 0$, on doit montrer que pour tout x réel, $\Psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$ ce qui n'est rien d'autre que la définition.

▶ **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $H(p)$ est vraie. Montrons que $H(p+1)$ l'est aussi. On sait donc que pour tout x réel, $\Psi^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$. En dérivant cette égalité il vient $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^{(p+1)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}} = (-1)^p p! \frac{d}{dx}(x-i)^{-(p+1)} = -(p+1)(-1)^p p!(x-i)^{-(p+2)} = \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{(x-i)^{p+2}}$$

donc $H(p+1)$ est vraie.

Q11. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après **Q9**, pour tout x réel,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2i}\left(\Psi(x) - \overline{\Psi(x)}\right) \text{ donc } \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\Psi^{(p)}(x) - \overline{\Psi}^{(p)}(x)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}\right)$$

$$\boxed{\varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right)}$$

On a utilisé le fait que dériver et conjuguer revient au même que conjuguer et dériver ...

Q12. ▶ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Notons $z = (x+i)^{p+1}$. Alors

$$\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| = |z - \overline{z}| = |2i\mathrm{Im}(z)| = 2\,|\mathrm{Im}(z)| \leq 2|z| \text{ (inégalité bien connue)}$$

Mais $|z| = \left|(x+i)^{p+1}\right| = |x+i|^{p+1} = \sqrt{1+x^2}^{p+1} = \left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}$. On a donc

$$\boxed{\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leq 2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}$$

▶ On suppose désormais $x \neq 0$. Alors, d'après **Q11**,

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| = \left|\frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right)\right| = \frac{p!}{2}\left|\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right|$$

$$= \frac{p!}{2}\left|\frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x-i)^{p+1}(x+i)^{p+1}}\right| = \frac{p!}{2}\left|\frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(1+x^2)^{p+1}}\right| \leq \frac{p!}{2}\frac{2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}{(1+x^2)^{p+1}} = \frac{p!}{\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}$$

Mais $1+x^2 \geq x^2 \geq 0$ donc $(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}} \geq (x^2)^{\frac{p+1}{2}} = x^{p+1} > 0$ donc

$$\boxed{\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}}$$

Q13. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour x réel, $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$. En dérivant p fois pour $p \in \mathbb{N}$, on a facilement $\varphi_\alpha^{(p)}(x) = \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)$ donc, si $x \neq 0$ et $\alpha \neq 0$,

$$\boxed{|\alpha| \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right|} = |\alpha| \left|\alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right| = |\alpha|^{p+1} \left|\varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right| \leq |\alpha|^{p+1} \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \boxed{\frac{p!}{|x|^{p+1}}}$$

d'après **Q12** que l'on peut appliquer puisque $\alpha x \neq 0$.

Si $\alpha = 0$ cette inégalité est encore vraie puisque le membre de gauche est nul et celui de droite est positif.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On remarque que pour x réel, $u_n(x) = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x) = \theta(x)\varphi_{\alpha_n}(x)$ en notant $\theta : x \mapsto a_n x^n$.
θ et φ_{α_n} sont de classe C^∞ donc u_n aussi et par la formule de Leibniz, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \theta^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

On suppose maintenant $p \leq n$. Alors si $k \in [\![0,p]\!]$, $k \leq n$ donc $\theta^{(k)}(x) = a_n \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ d'où

$$\boxed{u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)}$$

Q15. ▶ Soient $n \geq 0$ et $p \in [\![0, n-1]\!]$. $p \leq n$ donc on peut appliquer la question précédente ce qui donne bien $\boxed{u_n^{(p)}(0) = 0}$ puisque dans la somme, $k \leq p < n$ donc $n-k > 0$ donc $0^{n-k} = 0$.

▶ Puis, pour $p = n$, tous les termes donnent 0 comme avant sauf le terme pour $k = p = n$ qui donne $a_n \dbinom{n}{n} \dfrac{n!}{0!} \varphi_{\alpha_n}(0) = a_n n!$. Ainsi, $\boxed{u_n^{(n)}(0) = n! a_n}$.

Q16. [question assez technique]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après **Q14** (que l'on peut appliquer puisque $p \leq n$) et la définition de α_n :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \left| \frac{\alpha_n}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\sqrt{n!}}{(n-k)!} |x|^{n-k} |\alpha_n| \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right|$$

D'après **Q13**, $|\alpha_n| \left|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)\right| \leq \dfrac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}$ donc

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{\sqrt{n!}}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} = \sqrt{n!} |x|^{n-p-1} p! \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\text{Mais } \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

puisque tous les coefficients du binôme sont positifs.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ par la formule du binôme donc

$$\boxed{\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n}$$

Q17. En reprenant la même technique qu'à la question **Q6**, puisque les u_n sont C^∞, on va montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment $[-a,a]$ (on verra pourquoi $[-a,a]$ et pas $\mathbb{R}$ après). Ceci montrera alors que

$$\boxed{U \text{ est bien définie et } C^\infty \text{ sur tout } [-a,a] \text{ avec } a>0 \text{ donc sur } \mathbb{R}}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $a > 0$.

► Soit $n > p$. Soit $x \in [-a,a]$. Alors, puisque $n > p$, on peut appliquer la question **Q16** qui donne

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n \leq \frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n \text{ donc } \|u_n^{(p)}\|_{\infty,[-a,a]} \leq \frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n$$

puisque $\dfrac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n$ ne dépend pas de $x \in [-a,a]$. C'est ici que l'on voit qu'il fallait travailler sur $[-a,a]$ pour majorer $|x|$.

► Reste à voir que $\displaystyle\sum_{n>p}\frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}p!2^n$ converge i.e. $\displaystyle\sum_{n>p}\frac{(2a)^n}{\sqrt{n!}}$ converge (on a enlevé les termes qui ne dépendent pas de n).

On pose donc $x_n = \dfrac{(2a)^n}{\sqrt{n!}}$ qui est strictement positif et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2a}{\sqrt{n+1}} \to 0 \text{ donc } \sum a_n \text{ converge par le critère de d'Alembert.}$$

► Ainsi, $\displaystyle\sum_{n>p}\|u_n^{(p)}\|_{\infty,[-a,a]}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\|u_n^{(p)}\|_{\infty,[-a,a]}$ aussi (les premiers termes ne changent pas la nature de la série) donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout $[-a,a]$, ce qu'il fallait montrer.

Q18. La question précédente montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^{(p)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n^{(p)}$.

► Si $n \geq 1$, $u_n(0) = 0$ donc

$$\boxed{U(0)} = \sum_{n\geq 0}u_n(0) = u_0(0) = \boxed{a_0}$$

► Soit $p \geq 1$. Si $n > p$ alors $u_n^{(p)}(0) = 0$ d'après **Q15** donc

$$\boxed{U^{(p)}(0)} = \sum_{n=0}^{\infty}u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p}u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1}u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \boxed{\sum_{n=0}^{p-1}u_n^{(p)}(0) + p!a_p}$$

toujours d'après **Q15**.

Q19. [question plus difficile]

Soit $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On va montrer comment construire une suite réelle $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que la fonction U définie précédemment (qui est bien indéfiniment dérivable) vérifie pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^{(p)}(0) = b_p$.

Les a_n seront construits petit à petit, par récurrence.

► Tout d'abord, la question précédente montre que si l'on prend $a_0 = b_0$ alors on a bien $\boxed{U(0) = b_0}$ (en supposant que l'on a construit U).

► Regardons maintenant pour a_1. Si U existe, la question précédente donne $U'(0) = u_0'(0) + a_1$. u_0 a déjà été choisie au moment où l'on a posé a_0. Ainsi, il suffit de prendre $a_1 = b_1 - u_0'(0)$ pour garantir que $\boxed{U'(0) = b_1}$.

► Regardons ensuite pour a_2. Si U existe, la question précédente donne $U''(0) = u_0''(0) + u_1''(0) + 2a_2$. u_0 et u_1 ont déjà été choisies au moment où l'on a posé a_0 et a_1. Ainsi, il suffit de prendre $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(b_2 - u_0''(0) - u_1''(0)\right)$ pour garantir que $\boxed{U''(0) = b_2}$.

► On construit donc par récurrence la suite (a_p) de la manière suivante : on pose $a_0 = b_0$ puis, pour $p \geq 1$,

$$a_p = \frac{1}{p!}\left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right)$$

où $u_0, \dots, u_{p-1}$ sont bien définies par $a_0, \dots, a_{p-1}$ qui ont déjà été construits.

La fonction U correspondant aux (a_p) vérifie alors

$$\boxed{U \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ U^{(p)}(0) = b_p}$$

On a donc démontré le théorème de Borel.

PROBLÈME 2

Partie I - Eléments propres d'une matrice

Q20. Par définition d'un vecteur propre et d'une valeur propre $\lambda x = Ax$ et par définition du produit matriciel :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}$$

Q21. x est un vecteur non nul donc $|x_{i_0}| > 0$. D'après **Q20.** appliquée à i_0 et par inégalité triangulaire :

$$|\lambda x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\ |x_j|$$

En divisant par $|x_{i_0}| > 0$,

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\ \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}$$

Par définition de i_0, $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant 1$ donc en multipliant par $|a_{i_0,j}| \geqslant 0$ et en sommant, on obtient :

$$\boxed{|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|}$$

Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}$ donc

$$\boxed{|\lambda| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}}$$

Q22. $A_n(\alpha,\beta)$ est une matrice réelle et symétrique donc elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ par le théorème spectral. Ainsi

$$\boxed{\text{toutes ses valeurs propres sont réelles.}}$$

Q23. En appliquant **Q21.**, on obtient $|\lambda| \leqslant Max\{|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + 2|\beta|\}$ donc

$$\boxed{|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|}$$

Q24. La question **Q23.** appliquée à $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ fournit $|\lambda| \leqslant 2$. En conséquence, $\left|\dfrac{\lambda}{2}\right| \leqslant 1$ ainsi $\dfrac{\lambda}{2}$ est un réel compris entre -1 et 1 et comme cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$:

$$\exists\, \theta \in [0,\pi]\ /\ \frac{\lambda}{2} = \cos(\theta) \quad \text{ie} \quad \boxed{\exists\, \theta \in [0,\pi]\ /\ \lambda = 2\cos(\theta)}$$

Q25. Pour alléger l'écriture, notons , pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad D_n(X) = \chi_{A_n(0,1)}$. $\quad$ Ainsi $\quad D_1 = X, \quad D_2 = X^2 - 1$.

Pour $\quad n \geqslant 3$: $\quad D_n = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$

En développant ce déterminant suivant la première colonne, on trouve :

$$D_n = XD_{n-1} + (-1).(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant ce déterminant suivant la première ligne, on trouve :

$$D_n = XD_{n-1} - D_{n-2}$$

Par définition de U_n, on obtient finalement

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 3, \quad U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}}$$

Q26. Fixons θ dans $]0, \pi[$. $\quad$ On a donc $\quad \sin(\theta) \neq 0$.

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, H_n l'assertion : « $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$. »

- ▶ Initialisation :

  $U_1(\cos\theta) = D_1(2\cos\theta) = 2\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} \quad$ car $\quad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\ \sin\theta$.

  $U_2(\cos\theta) = D_2(2\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 1$.

  Or $\quad \sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta) = \sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta) = 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + (2\cos^2(\theta) - 1)\sin(\theta)$.

  Ainsi , on a bien $\quad \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = U_2(\cos\theta)$

- ▶ Hérédité :

  Supposons H_n et H_{n+1} vraies pour un entier n fixé $\geqslant 3$. $\quad$ Montrons que H_{n+2} est vraie.

  D'après **Q25.** et ces hypothèses :

  $$U_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\ U_{n+1}(\cos\theta) - U_n(\cos\theta) = \frac{2\cos\theta\ \sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

  En utilisant la formule : $\quad \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b), \quad$ il vient

  $$U_{n+2}(\cos\theta) = \frac{\sin((n+3)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin(\theta)}$$

  On a donc prouvé que H_{n+2} est vraie.

- ▶ Conclusion : nous avons prouvé par récurrence que

$$\boxed{\forall\,\theta \in]0, \pi[, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}$$

Q27. Prenons $n \geqslant 1$, $j \in [\![1, n]\!]$ et notons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$. Remarquons que $0 < \theta_j < \pi$.
On a donc , avec les notations de **Q25.** et le résultat de **Q26.** :

$$D_n(2\cos\theta_j) = U_n(\cos\theta_j) = \frac{\sin((n+1)\theta_j)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(j\pi)}{\sin(\theta)} = 0$$

Les θ_j sont deux à deux distincts, compris entre 0 et π et cos est une fonction injective sur $]0, \pi[$ donc nous venons de trouver n racines distinctes du polynôme D_n, c'est-à-dire n valeurs propres distinctes de $A_n(0, 1)$.
Cette matrice étant carrée de taille n , nous avons donc obtenu toutes ses valeurs propres. Chaque valeur propre est donc d'ordre 1 et par théorème, les espaces propres associés sont tous de dimension 1.

$Sp((A_n(0,1)) = \left\{2\cos\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right), j \in [\![1, n]\!]\right\}$.
Chaque valeur propre est d'ordre 1 et l'espace propre associé est de dimension 1.

Q28. Il suffit d'écrire $(A_n(0, 1) - 2\cos(\theta_j)I_n)x = 0$.

Q29. Les suites de E sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Par théorème, on sait que E est un espace vectoriel de dimension 2.
On peut montrer facilement que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Il contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire.
Pour la dimension, on peut utiliser l'isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$, qui à toute suite de E associe le couple (u_0, u_1).
Je ne sais pas si cela est attendu.

Q30.
- ▶ L'équation caractéristique est : $r^2 - 2\cos(\theta_j)r + 1 = 0$. θ_j étant non congru à 0 modulo π, cette équation a deux racines complexes distinctes conjuguées $e^{i\ \theta_j}$ et $e^{-i\ \theta_j}$.
- ▶ D'après le cours

$$\forall\, u \in E, \quad \exists\,(A, B) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k = A\cos(k\theta_j) + B\sin(k\theta_j)$$

- ▶ Soit $F = \{u \in E \;/\; u_0 = u_{n+1} = 0\}$.
Soit u une suite de E. Avec les notations précédentes :

$$u_0 = 0 \iff A = 0$$

Dans ce cas, $u_{n+1} = B\sin((n+1)\theta_j) = B\sin(j\pi) = 0$. Donc

$$\boxed{F = \{u \in E \;/\; \exists\, B \in R \;/\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k = B\sin(k\theta_j)\} = Vect\left((\sin(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}}\right)}$$

Q31. On sait que l'espace propre E_j de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ est de dimension 1.
On remarque qu'un élément de F vérifie le système de **Q28.** et que F est de dimension 1. Donc

$$E_j = \left\{ B \begin{pmatrix} \sin(\theta_j) \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix} \;/\; B \in R \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} \sin(\theta_j) \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}\right)$$

Q32. ▶ Cas $\beta = 0$:
$A_n(\alpha, 0) = \alpha I_n$ donc α est l'unique valeur propre de $A_n(\alpha, 0)$ et le sous espace propre associé est $\mathbb{R}^n$.

▶ Cas $\beta \neq 0$:
En factorisant chaque ligne du déterminant par β, on obtient

$$\chi_{A_n(\alpha,\beta)}(X) = \beta^n \ \chi_{A_n(0,1)}\left(\frac{X-\alpha}{\beta}\right)$$

Donc

$$\lambda \in Sp\left(A_n(\alpha,\beta)\right) \iff \frac{\lambda-\alpha}{\beta} \in Sp\left(A_n(0,1)\right) \iff \lambda \in \alpha + \beta.Sp\left(A_n(0,1)\right)$$

Ainsi

$$\boxed{Sp\left(A_n(\alpha,\beta)\right) = \left\{\alpha + 2\beta \ \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \ / \ j \in [\![1,n]\!]\right\}}$$

De plus, pour $j \in [\![1,n]\!]$ et en notant $\lambda = \cos\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right)$, un simple calcul montre que

$$A_n(\alpha,\beta) - (\alpha + 2\beta\lambda)I_n = \beta \ (A_n(0,1) - \lambda I_n)$$

β étant non nul, x est donc un vecteur propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2\beta\lambda$ si et seulement si x est vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre λ.

Donc le sous espace propre de $\alpha + 2\beta\lambda$ pour $A_n(\alpha,\beta)$ est identique au sous espace propre de λ pour A_n

Partie II - Système différentiel

Q33. Un produit matriciel par blocs qui utilise le fait que $CD = DC$ donne

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$$

Q34. On sait d'après le cours que si $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0_n & M_4 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_n \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs alors
$\det(M) = \det(M_1) \times \det(M_4)$. Donc, par propriété du déterminant :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) \times \det\left(\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) \times \det(D) \times \det(I_n) = \det(AD - BC) \times \det(D)$$

On sait que $\det(I_n) = 1$ et D est inversible donc $\det(D) \neq 0$. Ainsi, en simplifiant, il vient

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC)}$$

Q35. Soit a un complexe. Dire que $D + aI_n$ est inversible équivaut à dire que $-a$ n'est pas valeur propre de D.
D , en tant que matrice de $M_n(\mathbb{C})$, possède n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, (comptées avec leur ordre de multiplicité).
D n'est pas inversible donc 0 n'est pas valeur propre. On peut donc supposer que $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n|$.
Il existe un entier p_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $p_0 > |\lambda_n|$. Alors $\forall\, p \geqslant p_0,\quad p > |\lambda_n|$. Donc

$$\forall\, p \geqslant p_0, \quad \left|\frac{-1}{p}\right| < \frac{1}{|\lambda_n|} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|}$$

Donc pour tout entier $p \geqslant p_0$, $-\dfrac{1}{p}$ n'est pas valeur propre de D.

$$\boxed{\text{Ainsi il existe } p_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } p \geqslant p_0,\ D + \frac{1}{p} I_n \text{ est inversible.}}$$

Q36. $D + \dfrac{1}{p} I_n$ commute avec C donc on peut lui appliquer l'égalité (1) à lorsqu' elle est inversible :

$$\forall\, p \geqslant p_0, \quad \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p} I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(A(D + \frac{1}{p} I_n) - BC\right) \qquad (*)$$

Les applications $\left(t \in \mathbb{R} \longmapsto \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + tI_n \end{pmatrix}\right)\right)$ et $(t \in \mathbb{R} \longmapsto \det\left(A(D + tI_n) - BC\right))$ sont polynomiales en t donc continues sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Un passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$ fournit alors :

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC)}$$

Q37. $N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}$ donc

$$\det(XI_{2n} - N) = \det\left(\begin{pmatrix} XI_n & -I_n \\ -M & XI_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)$$

avec $A = D = XI_n$, $,B = -I_n$, $C = -M$ et donc $CD = DC$. Par **Q36.**

$$\det(XI_{2n} - N) = \det(X^2 I_n - M)$$

Donc $\lambda \in Sp(N) \iff \lambda^2 \in Sp(M)$ et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C} \ / \ \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}}$$

Q38. Par hypothèse, $x \neq 0$ et $Mx = \mu^2 x$. Donc $y = \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \neq 0$ et un calcul matriciel par blocs montre que

$$Ny = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \mu y$$

$$\boxed{\text{Ainsi } y \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \mu.}$$

Q39.
- ► M est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de M, donc, par **Q37.**, 0 n'est pas valeur propre de N et donc $\boxed{N \text{ est inversible.}}$
- ► Soit λ une valeur propre de M.
  Le complexe λ est non nul donc admet deux racines carrées μ et $-\mu$ distinctes.
  Notons p la dimension du sous espace propre de M associé à λ et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de cet espace. Par **Q38.**, les vecteurs $y_i = \begin{pmatrix} e_i \\ \mu e_i \end{pmatrix}$, pour i entre 1 et p, sont p vecteurs propres de N associés à la valeur propre μ. De plus, comme les e_i, ils sont linéairement indépendants. Cela prouve donc que la dimension du sous espace propre de N associé à μ est de dimension supérieur ou égale à p.
  Il en est de même pour le sous espace propre de N associé à $-\mu$.
- ► Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres distinctes de M et $n_1, \ldots, n_q$ les dimensions des sous espaces propres associés.
  M est diagonalisable donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} n_i = n$.
  Pour $i \in [\![1, q]\!]$, notons μ_i et $-\mu_i$ les deux racines carrées distinctes de λ_i et E_i et E_i' les deux sous espaces propres associés.
  D'après le deuxième point :

$$\sum_{i=1}^{q} (dim(E_i) + dim(E_i')) \geqslant \sum_{i=1}^{q} 2n_i = 2n$$

  Par ailleurs , on sait que les espaces propres sont en somme directe donc

$$\sum_{i=1}^{q} (dim(E_i) + dim(E_i')) \leqslant 2n$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{q}(dim(E_i) + dim(E_i')) = 2n \quad \text{et} \quad \boxed{N\text{est diagonalisable.}}$$

Remarque : cela prouve au passage que E_i et E_i' sont de dimension n_i.

Q40. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ donc $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}$. On a facilement

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \iff X' = BX$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(-2,1) & 0_2 \end{pmatrix}$$

Le théorème de Cauchy dit que

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 4.}}$$

Q41. Notons $A = A_2(-2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 + 4X + 3 = (x+1)(X+3)$.

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, -3\}$. **Q37.** appliquée à $n = 2$, $M = A$ et $N = B$ permet de conclure que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{i, -i, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}}$$

B est une matrice qui a 4 valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } M_4(\mathbb{C}).}$$

Q42. Il s'agit de trouver les sous espaces propres de A. $A + I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc

$$SEP_A(-1) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad SEP_A(-3) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Q38. permet d'affirmer que les sous espaces propres de B sont de dimension 1 et donne l'expression des vecteurs propres :

$$SEP_B(-i\sqrt{3}) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad SEP_B(i\sqrt{3}) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$SEP_B(-i) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}, \quad SEP_B(i) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Cela fournit donc la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres pour la formule de changement de base : $\quad B = PDP^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix}$$

Q43.

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = -i\sqrt{3}\ y_1 \\ y_2' = i\sqrt{3}\ y_2 \\ y_3' = i\ y_3 \\ y_4' = i\ y_4 \end{cases} \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \ /\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1(t) = ae^{-i\sqrt{3}\ t} \\ y_2(t) = be^{i\sqrt{3}\ t} \\ y_3(t) = ce^{-it} \\ y_4(t) = de^{it} \end{cases}$$

Q44. On a, grâce à l'inversibilité de P et en notant $\quad Y = P^{-1}X$:

$$X' = BX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY$$

Donc, comme $\quad X = PY$:

$$X' = BX \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \ /\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = ae^{-i\sqrt{3}\ t} + be^{i\sqrt{3}\ t} + ce^{-it} + de^{it} \\ x_2(t) = -ae^{-i\sqrt{3}\ t} - be^{i\sqrt{3}\ t} + ce^{-i\ t} + de^{it} \\ x_1'(t) = -i\sqrt{3}\ ae^{-i\sqrt{3}\ t} + ib\sqrt{3}\ e^{i\sqrt{3}\ t} - ice^{-it} + ide^{it} \\ x_2'(t) = i\sqrt{3}\ ae^{-i\sqrt{3}\ t} - ib\sqrt{3}\ e^{i\sqrt{3}\ t} - ice^{-it} + ide^{it} \end{cases}$$

On remarque que tout est cohérent au niveau des dérivées. Les deux dernières équations sont inutiles.

$$\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1'(0) = 0 \\ x_2'(0) = 0 \end{cases} \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \ /\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = ae^{-i\sqrt{3}\ t} + be^{i\sqrt{3}\ t} + ce^{-it} + de^{it} \\ x_2(t) = -ae^{-i\sqrt{3}\ t} - be^{i\sqrt{3}\ t} + ce^{-it} + de^{it} \\ a + b + c + d = 1 \\ -a - b + c + d = 0 \\ -\sqrt{3}\ a + \sqrt{3}\ b - c + d = 0 \\ \sqrt{3}\ a - \sqrt{3}\ b - c + d = 0 \end{cases}$$

Intéressons nous au système formé des 4 dernières équations. En ajoutant et retranchant les deux premières d'une part, et les deux dernières d'autre part, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ -a - b + c + d = 0 \\ -\sqrt{3}\ a + \sqrt{3}\ b - c + d = 0 \\ \sqrt{3}\ a - \sqrt{3}\ b - c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(c+d) = 1 \\ 2(a+b) = 1 \\ c = d \\ a = b \end{cases} \iff a = b = c = d = \frac{1}{4}$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \\ (x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1,0,0,0). \end{cases} \iff \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}\ \Big(\cos(\sqrt{3}\ t) + \cos(t)\Big) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{2}\ \Big(-\cos(\sqrt{3}\ t) + \cos(t)\Big) \end{cases}}$$