

Concours commun Mines et Ponts 2023
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - MP

m.laamoum@gmail.com.

Fonction de Wallis

Préliminaires

1. Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^k}{k^2}$ est égal à 1, σ est définie au moins sur $] -1, 1[$, cette série converge absolument pour $x = 1$ ou $x = -1$ donc le domaine de définition de σ est exactement égal à $[-1, 1]$.

On a $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x^k}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$, donc la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ converge normalement et uniformément sur $[-1, 1]$, les fonctions : $x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$ sont continues donc σ est continue sur $[-1, 1]$.

2 ▷ • On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \cos(nt) dt &= \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= \left[\frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt &= \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \frac{t \sin(nt)}{n} dt \\ &= -2 \left(\left[-\frac{t \cos(nt)}{n^2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \right) \\ &= \frac{2\pi \cos(n\pi)}{n^2} - 2 \left[\frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{2\pi\alpha(-1)^n + \beta((-1)^n - 1)}{n^2}$$

Cherchons donc α et β tels que : $2\pi\alpha(-1)^n + \beta((-1)^n - 1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On obtient pour n pair $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ et pour n impair, $\beta = -1$.

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

- Soit $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \sum_{k=1}^n \cos(kt) \\
&= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left((e^{it})^k \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{it(n+1)}}{1 - e^{it}} - 1 \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} e^{i \frac{nt}{2}} - 1 \right) \\
&= \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} t \right) \cos \left(\frac{nt}{2} \right) - \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \quad \sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\
&= \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) + \sin \left(\frac{t}{2} \right) - 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} - \frac{1}{2}.$$

- 3 ▷ • Soit φ de classe \mathcal{C}^1 de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} et $x > 0$ alors

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x} \varphi(t) \right]_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt$$

φ de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ donc φ et φ' sont bornées, soit $M_0 = \sup_{t \in [0, \pi]} |\varphi(t)|$ et $M_1 = \sup_{t \in [0, \pi]} |\varphi'(t)|$

, ce qui donne :

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{2M_0 + \pi M_1}{x}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

- On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right) dt \\
&= \int_0^\pi \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} dt + \int_0^\pi \left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right) \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right) \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) dt
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin(\frac{t}{2})} = -1$ alors la fonction

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0, \pi]$, de plus la fonction

$$\omega : t \mapsto \begin{cases} \frac{2 \sin(\frac{t}{2})}{t} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est DSE en 0 ,avec un rayon de convergence infini, donc elle est de classe \mathcal{C}^∞ , de plus elle ne s'annule pas sur $[0, \pi]$ donc $\frac{1}{\omega}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, \pi]$, ainsi φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ et .

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$$

le résultat précédent donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0$, par suite

$$\sigma(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Équivalents

4 ▷ • Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g : t \mapsto (\sin(t))^x$ est définie et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $g(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$ donc g est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $x > -1$, d'où $D_f =]-1, +\infty[$.

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$$

• Soit $x > -1$, on a

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t))' (\sin(t))^{x+1} dt \\ &= [-\cos(t)(\sin(t))^{x+1}]_0^{\pi/2} + (x+1) \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^2 (\sin(t))^x dt \\ &= (x+1) \int_0^{\pi/2} (1 - (\sin(t))^2) (\sin(t))^x dt \\ &= (x+1) (f(x) - f(x+2)) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2).$$

5 ▷ • La fonction $g := (x, t) \mapsto (\sin(t))^x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times]0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e^{x \ln(\sin(t))} \right) = (\ln(\sin(t)))^2 (\sin(t))^x$$

pour x dans I , $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln^2(t)}{t^{-x}}$, soit $\lambda \in]-x, 1[$ on $\frac{\ln^2(t)}{t^{-x}} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\lambda}\right)$, ce qui donne

l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $[a, b] \subset I$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = (\ln(\sin(t)))^2 (\sin(t))^a = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a, t)$$

cette domination par une fonction intégrable entraîne que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, ceci est valable pour tout $[a, b] \subset I$ donc f est de classe \mathcal{C}^2 sur I et :

$$\forall x \in I, f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot (\sin(t))^x dt \text{ et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 (\sin(t))^x dt.$$

• Pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et $f''(x) \geq 0$ donc f est décroissante et convexe sur I .

6 ▷ On pout tout x dans I : $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$; donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} (x+1)f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} (x+2)f(x+2) \\ &= f(1) \end{aligned}$$

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = 1, \text{ d'où}$$

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}}{\sim} \frac{1}{x+1}}$$

7 ▷ • Soit n un entier naturel. D'après la question 4. on a $(n+2)f(n+2) = (n+1)f(n)$ puis, en multipliant les deux membres par $f(n+1)$

$$(n+2)f(n+2)f(n+1) = (n+1)f(n+1)f(n).$$

Ainsi, la suite $((n+1) \cdot f(n+1) \cdot f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $(n+1)f(n+1)f(n) = f(1)f(0) = \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}} (*)$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+2) \leq f(n+1) \leq f(n)$, on divise cette relation par $f(n)$ qui est strictement positif,

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{f(n+2)}{f(n)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$$

le théorème d'encadrement donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ et $f(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n)$.

La relation (*) donne $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Soit $x \geq 1$ et $n = e(x)$ (*partie entière*), on a $f(n+1) < f(x) \leq f(n)$ et

$$\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

8 ▷ ...

3. Développement en série entière

9 ▷ • Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $(\ln(\sin(t)))^n \underset{t \rightarrow 0}{=} o(\frac{1}{\sqrt{t}})$, donc l'intégrale D_n est convergente.

• On a $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$, on fait le changement $u = \frac{\pi}{2} - t$ on obtient $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$.

10 ▷ • On a $f'(0) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$.

Calcul de D_1 : on a

$$\begin{aligned} 2D_1 &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt \\ &= -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt \end{aligned}$$

dans cette dernière intégrale posons $2t = u$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du \\ &= \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \end{aligned}$$

le changement $v = \pi - u$ donne $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = D_1$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt = D_1$,

d'où $D_1 = -\frac{\pi \ln(2)}{2}$.

Finalement $\boxed{f'(0) = -\frac{\pi \ln(2)}{2}}$.

• $f'(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot (\sin(t)) dt$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}]$, par une intégration par parties on a :

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot (\sin(t)) dt = [-\ln(\sin(t)) \cos(t)]_{\varepsilon}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} dt$$

le changement de variable $\cos(t) = u$ donne

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} dt &= \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{1 - \cos^2(t)} \sin(t) dt \\ &= \int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{u^2}{1 - u^2} du \\ &= \int_0^{\cos(\varepsilon)} -1 + \frac{1}{2(1 - u)} + \frac{1}{2(1 + u)} du \\ &= \left[-u - \frac{1}{2} \ln(1 - u) + \frac{1}{2} \ln(1 + u) \right]_0^{\cos(\varepsilon)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(1) = -1 + \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(\sin(\varepsilon)) \cos(\varepsilon) - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\varepsilon)))$$

et on a

$$\begin{aligned} \ln(\sin \varepsilon) \cos(\varepsilon) - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\varepsilon)) &= \ln(\varepsilon + o(\varepsilon))(1 + o(\varepsilon)) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)\right) \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

donc $f'(1) = \ln(2) - 1$

11 ▷ • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$, posons $u = -\ln(\sin(t))$ donc

$$du = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = -\frac{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}{\sin(t)} dt = -\frac{\sqrt{1 - e^{-2u}}}{e^{-u}} dt = -\sqrt{e^{2u}(t) - 1} dt$$

ce qui donne

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du$$

• On a $\frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} = e^{-u} u^n - \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u} - 1}}$.

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du$, on vérifie facilement que cette intégrale converge, $I_n = nI_{n-1}$ et $I_n = n!$, donc

$$(-1)^n D_n = n! + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du$$

puis que $e^{2u} - 1 \geq 2u$ pour tout $u \geq 0$ alors

$$\frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u} - 1}} \leq u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u}$$

L'inégalité de Cauchy Shwarz donne

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} du &= \int_0^{+\infty} \left(u^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u} \right) \left(u^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}u} \right) du \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{(n!)(n-1)!} \\ &\leq \frac{n!}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u}-1}} du = o(n!)$ et

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Soit $x \in]-1, 1[$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi/2} e^{x \ln(\sin(t))} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln(\sin(t)))^n}{n!} dt \end{aligned}$$

posons $f_n(t) = \frac{(x \ln(\sin(t)))^n}{n!}$, f_n est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $t \mapsto (\sin(t))^x$ qui est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

En fin

$$\int_0^{\pi/2} |f_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} (-1)^n D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^n$$

donc $\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)| dt$ converge, le théorème d'interversion des symboles \sum et \int donne :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

4. Convergence de suite de fonctions

Soit $a > 0, b > 0, \rho = \frac{b-a}{b+a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)$.

13 ▷ • Ψ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\Psi(x) = \ln\left(\frac{a^2}{2}(\cos(2x) + 1) + \frac{b^2}{2}(1 - \cos(2x))\right) = \ln\left(\frac{a^2-b^2}{2}\cos(2x) + \frac{a^2+b^2}{2}\right)$
donc

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{\frac{a^2-b^2}{2} \cos(2x) + \frac{a^2+b^2}{2}} \\ &= \frac{2(b^2 - a^2) \sin(2x)}{(a^2 - b^2) \cos(2x) + \frac{(b+a)^2 + (b-a)^2}{2}} \\ &= \frac{4(b^2 - a^2) \sin(2x)}{(b+a)^2 - 2(b^2 - a^2) \cos(2x) + (b-a)^2} \\ &= \frac{4\rho \sin(2x)}{1 - 2\rho \cos(2x) + \rho^2} \end{aligned}$$

ainsi $\Psi'(x) = 4 \operatorname{Im} \frac{1}{1 - \rho e^{2ix}}$.

De plus $|\rho| < 1$ donc $\frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx}$ d'où

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14 ▷ Posons $g_n : x \mapsto \rho^k \sin(2kx)$, on a $|g_n(x)| \leq |\rho|^k$ et $|\rho| < 1$ donc $\sum g_n$ converge normalement et uniformément sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$, le théorème d'interversion des symboles \int et \sum donne :

$$\Psi(x) - \Psi(0) = 4 \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) dx = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \int_0^x \sin(2kx) dx.$$

$\Psi(0) = 2 \ln(a)$, donc

$$\Psi(x) = 2 \ln(a) - 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx) - 1}{2k} \rho^k$$

on sait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} = -\ln(1 - \rho) = -\ln\left(\frac{2a}{b+a}\right)$, d'où

$$\Psi(x) = 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k.$$

15 ▷ Puisque $|\rho| < 1$ alors

$$|\Psi(x)| \leq \left| 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\rho|^k}{k} = \left| 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| - 2 \ln(\rho).$$

Donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$ converge normalement et uniformément sur \mathbb{R} , donc

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^\pi \Psi(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx$$

Soit n dans \mathbb{N} , la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2nx) \cos(2kx)}{k} \rho^k$ converge normalement et uniformément sur \mathbb{R} , alors

$$\int_0^\pi \cos(2nx) \Psi(x) dx = 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^\pi \cos(2nx) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx$$

et on a

$$\int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx = \int_0^\pi \frac{\cos(2(n+k)x) + \cos(2(n-k)x)}{2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

par suite

$$\int_0^\pi \Psi(x) dx = 2\pi \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ et } \int_0^\pi \cos(2nx) \Psi(x) dx = -\pi \frac{\rho^n}{n} \quad \text{si } n \neq 0$$

ainsi

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2} = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2).$$

16 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = \frac{n}{n+1}$.

- Soit $t \in]0, \pi[$ on a

$$\Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(\sin(t))$$

donc (Ψ_n) converge simplement sur $]0, \pi[$.

- On a : $f''(0) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 dt$, la suite (Ψ_n^2) converge simplement sur $]0, \pi[$ vers la fonction $t \mapsto 4 (\ln(\sin(t)))^2$.

Pour $n \geq 2$

$$|\Psi_n(x)| \leq \left| 2 \ln\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \right| - 2 \ln\left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right) = 2 \ln(2) - \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

comme $\frac{1}{2} \leq \frac{n-1}{n+1} \leq 1$. donc

$$|\Psi_n(x)| \leq 3 \ln(2)$$

le théorème de la convergence dominée sur $]0, \pi[$ donne :

$$4 \int_0^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (\Psi_n(x))^2 dx$$

De la question 15 on a

$$\int_0^{\pi} \Psi_n(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right).$$

la fonction σ est continue sur $[-1, 1]$ donc

$$4 \int_0^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 dt = 4\pi (\ln(2))^2 + 2\pi\sigma(1)$$

De plus

$$\int_0^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 dt = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 dt$$

et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 dt \stackrel{x=\pi-t}{=} \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(x)))^2 dx$$

donc

$$8 \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 dt = 4\pi (\ln(2))^2 + \frac{\pi^3}{3}$$

d'où $f''(0) = \frac{\pi}{2} (\ln(2))^2 + \frac{\pi^3}{24}$.

5. Convexité logarithmique

17 ▷ f est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $(\ln(f(x)))'' = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$, on écrit

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)) \cdot (\sin(t))^{x/2})' dt$$

l'inégalité de Cauchy Schwarz donne

$$(f'(x))^2 \leq \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 \cdot (\sin(t))^x dt \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt = f''(x)f(x)$$

d'où $(\ln(f(x)))'' \geq 0 \forall x \in I$ et f est ln-convexe de I dans \mathbb{R} .

18 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ donc $\ln(f(x+2)) - \ln(f(x)) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ ce qui donne

$$\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on applique cette relation pour $x+k$ et on la somme pour $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$:

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 ▷ • Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \leq p$.

On utilise l'inégalité des pentes pour une fonction convexe :

Soit g une fonction définie sur un intervalle I . Si g est convexe alors, pour tous $a < c < b$ dans I :

$$\frac{g(c) - g(a)}{c - a} \leq \frac{g(b) - g(c)}{b - c}$$

Pour $n \leq n+x \leq p+n$ on a

$$\frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et pour $n-1 \leq n \leq n+x$:

$$\frac{\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1)}{1} \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x}$$

ainsi

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

• On a $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$, $\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(On peut utiliser l'équivalent de f en $+\infty$ ce qui n'est pas vérifié par toutes les fonctions cherchées)

20 ▷ Pour $p \geq 0$ et $x \geq 0$ on a

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

donc

$$\tilde{f}(p) - \tilde{f}(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right).$$

ce qui donne

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(p) + \tilde{f}(0) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{1 + \frac{2x}{2k+1}}{1 + \frac{2x}{2k+2}} \right).$$

or $\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\tilde{f}(x) = \ln(f(2x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(\frac{1 + \frac{2x}{2k+1}}{1 + \frac{2x}{2k+2}} \right).$$

par suite $\tilde{f}(x)$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1 + \frac{x}{2k+2}}{1 + \frac{x}{2k+1}} \right), \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (*)$$

Si $x \in]-1, 0]$, on a $f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2)$; soit $n > 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x+1} \prod_{k=0}^n \left(\frac{1 + \frac{x+2}{2k+2}}{1 + \frac{x+2}{2k+1}} \right) &= \frac{x+2}{x+1} \prod_{k=0}^n \left(\frac{\frac{x+2(k+1)+2}{2k+2}}{\frac{x+2(k+1)+1}{2k+1}} \right) \\ &= \frac{x+2}{x+1} \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\frac{x+2k+2}{2k}}{\frac{x+2k+1}{2k-1}} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{n+1} \left(\frac{\frac{x+2k+2}{2k+1}}{\frac{x+2k+1}{2k+1}} \right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\frac{2k+2}{2k}}{\frac{2k+1}{2k-1}} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x+2}{2k+2}}{1 + \frac{x+2}{2k+1}} \right) \frac{2n+4}{2n+3} \end{aligned}$$

par passage à la limite on obtient la formule (*) pour x dans $]-1, 0]$, d'où f est définie d'une manière unique par :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1 + \frac{x}{2k+2}}{1 + \frac{x}{2k+1}} \right), \forall x \in I$$

21 ▷ Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, et g de $]-T, +\infty[$ dans \mathbb{R} , ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

et on a $g(0) \neq 0$.

Soit $\varphi(x) = \frac{\pi}{2g(0)}g(Tx)$, elle est ln-convexes et si $x \in]-1, +\infty[$, $(x+1)g(Tx) = (x+2)g(Tx+2T)$ donc $(x+1)\varphi(x) = (x+2)\varphi(x+2)$ et $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.

D'après la question précédente $\varphi = f$, par suite $g(t) = \frac{2g(0)}{\pi} f\left(\frac{t}{T}\right)$

22 ▷ Si h , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $\ln \circ h$ est convexe, donc définie et continue sur \mathbb{R} , la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$$

donne $h(T) = h(-2T) = 0$, ce qui est absurde. Une telle fonction n'existe pas.

FIN