

Chaîne de Markov en temps continu

Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geq 2$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A . Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$) on note $A[i]$ pour $A[i, 1]$. De même si A est une matrice ligne ($p = 1$) on note $A[i]$ pour $A[1, i]$.
- On identifie \mathbf{R}^N avec $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ on note $E_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf la k -ième qui vaut 1. On rappelle que (E_1, \dots, E_N) est une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

On note $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $U[i] = 1$.

- On appelle noyau de Markov une matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ telle que

$$(M_1) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, K[i, j] \geq 0$$

$$(M_2) \quad \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \sum_{j=1}^N K[i, j] = 1$$

- On appelle probabilité un vecteur ligne $\mu \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ tel que

$$(P_1) \quad \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mu[i] \geq 0$$

$$(P_2) \quad \sum_{j=1}^N \mu[j] = 1$$

- On notera $I_N \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice identité.

Préliminaires

1 \triangleright Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov K .

2 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ converge.

On notera $H_t \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$$

4 ▷ Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Montrer que pour $(t, s) \in \mathbf{R}_+^2$, $H_{t+s} = H_t H_s$.

On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N . À l'instant initial le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.

On suppose que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i , il se retrouve dans l'état j avec une probabilité p_{ij} qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

Ce système est modélisé par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1; N \rrbracket$ qui correspond à l'état du système après k impulsions. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et tout $k \in \mathbf{N}$ tels que $P(Z_k = i) \neq 0$ on a donc $P(Z_{k+1} = j | Z_k = i) = p_{ij}$. En particulier, cela ne dépend pas de k . De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.

On considère la matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, K[i, j] = p_{ij}$$

6 ▷ Justifier que K est un noyau de Markov.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ montrer que $P(Z_n = j) = K^n[1, j]$.

On pourra procéder par récurrence.

8 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t . Pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ on note $A_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t ». Justifier que $P(A_{t,j}) = H_t[1, j]$.

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension N . On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . On pose $q_u : E \rightarrow \mathbf{R}$ défini par $q_u : x \mapsto (u(x)|x)$ et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geq 0$.

9 ▷ Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme u . Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de u et on note λ_2 la plus petite valeur propre non nulle de u . On note $p : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\ker(u)$.

10 ▷ Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$.

Partie 3 - Convergence de $H_t[i, j]$

On considère un noyau de Markov K . On suppose que 1 est une valeur propre simple de K .

On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ telle que :

(a) Pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\pi[j] \neq 0$.

(b) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, $\pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j]$; on dit que K est π -réversible.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel t positif H_t est aussi un noyau de Markov π -réversible c'est-à-dire que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, pour $X, Y \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ la limite de $H_t[i, j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

11 ▷ Montrer que $\pi K = \pi$.

12 ▷ Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

Dans la suite on note E l'espace euclidien $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire.

13 ▷ On considère l'endomorphisme de E défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$. Montrer que $\ker(u) = \text{Vect}(U)$ et que u est un endomorphisme autoadjoint de E .

On admet que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'endomorphisme $X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E .

14 ▷ Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i]$$

Que dire des valeurs propres de u ?

Soit $X \in E$, on note ψ_X la fonction définie de \mathbf{R} dans E par $\psi_X : t \mapsto H_t X$ et φ_X la fonction définie de \mathbf{R} dans \mathbf{R} par $\varphi_X : t \mapsto \|H_t X\|^2$

15 ▷ Justifier que ψ_X est dérivable et que pour tout t dans \mathbf{R} ,

$$\psi'_X(t) = -(I_N - K)H_t X$$

16 ▷ En déduire que φ_X est dérivable et exprimer $\varphi'_X(t)$ à l'aide de q_u .

On note $p : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur $\ker(u)$.

17 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

18 ▷ On pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u .

Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$.

En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$.

19 ▷ Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k])(H_{t/2}[k, j] - \pi[j])$$

On pourra utiliser la question 5.

21 ▷ En déduire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j]$.

FIN DU PROBLÈME